國民教育研究學報，第 2 期：255～284頁
民85年，國立嘉義師院國民教育研究所

當前幼兒數學研究及其教育意涵

周　淑　惠

國立新竹師範學院

摘　要

皮亞傑實爲研究兒童數學概念發展之泰斗，基本上其研究立論爲：數學具邏輯本質，學前幼兒欠缺邏輯思考力，因而在數學上是無能的。近年來有關兒童數學概念發展之研究陸續出現，這些研究散見於數學之各次領域(如數、量、空間....)，而且大多數研究之發現似乎有異於皮氏之數學無能論。然而目前有關「幼兒數學教育」之著作多半仍以皮氏理論爲依歸，而皮氏本人卻鮮少論及教育上之運用，因而實有必要將當前的研究加以研析與整合，以探討幼兒數學概念發展的特性，並進而闡論其在教育上之意涵。

本研究經文獻分析結果，發現:(1)學前幼兒確實在數、量、幾何、空間、邏輯等概念上有一些理解與能力，例如「非正式算術」(informal arithmetic)；(2)這些數學方面的能力是自小逐漸萌發、日益精進的，因此有些脆弱與限制；(3)幼兒數學概念的發展具有自發自導、建構發明、情境實用、以及直覺具体等特性。以上幼兒數學能力之特性與幼兒數學概念發展之特性在教學上之啓示爲：提供豐富與刺激性的環境以回應及支持幼兒的興趣與能力，使正在發展與成熟中之能力，充份發展，即類似布魯納所謂的「鷹架式」教學支持。而鷹架式支持之具体而微的教學原則爲：生活化、遊戲化、具體化、直覺化、解題化、互動化。

壹、緒論

一、研究緣起與目的

數學爲基礎科學，其重要性往往成爲學校教育所關切的重點，尤其是在即將邁入新紀元之際，許多國家開始思索當前及未來數學教育的方向與趨勢，以期培養適存於未來世紀之公民，這些國家包括英國、歐洲、美國、澳洲與我國。而在當前各國致力於數學課程改革之際，大量參考數學概念發展與數學教育方面的研究，以爲新課程規劃與編寫之基礎，實乃迫切需要。

關於兒童數學研究，最有成就的人物當推皮亞傑莫屬。他的研究廣涉數、量、幾何、空間、時間、分類、序列等數學概念的發展，名符其實爲一代大師，影響學界甚鉅。皮氏的重要研究立論及發現爲：數學概念之本質爲邏輯，它與邏輯概念是同步發展的(goes hand in hand)；基本上，前運思期兒童(約六歲半以前)尙未具有邏輯思考能力，在發展階段上是屬於「前邏輯期」，也等於是「前數學期」(Piaget & Szeminska, 1952)，無法理解數學。正因爲學前幼兒受先天限制無法理解數學，雖然他們會簡單的唱數與加減運算，皮亞傑並不在意，認定幼兒在數學上是無能的(Baroody,1992)。此一無能觀點，對於前運思期幼兒之數學教育實予人有無法著力之憾，而且皮氏本人也甚少論及教育上的運用，或發展任何的課程，學者乃多由其理論著述中尋找依據，以自己的理解闡論兒童數學教育或發展課程，莫衷一是。

其實，自皮亞傑研究問世後，有關兒童數學概念發展的研究陸續發表，這些研究似乎有很多是與皮亞傑持不同論調的，認爲學前幼兒是具有一些能力也能理解一些概念，絕非數學無能；也有一些研究有不同的研究興趣或主題，基本上不涉入皮氏理論之爭議。然而目前有關「幼兒數學教育」的著作，仍以皮亞傑理論爲主要依歸，很少涉及皮亞傑學派以外當前的一些研究。此外，數學所涉及的層面甚廣，當前的這些幼兒數學研究散見於數學的各個次領域(數、量、空間、幾何、分類、序列等)，實有必要將各個領域之研究加以整合並研析，繼而根據研析結果探討其在數學教育上之意涵，爲幼兒數學教育指示方向，也爲目前我國正在進行的小學數學課程改革提供參

考。因此，本研究之主要目的在探討當代幼兒數學概念發展方面的研究，並根據幼兒數學概念發展之特性，申論在幼兒數學教育上之意涵。

二、研究方法

本研究採文獻分析法，將近年來兒童數學概念發展方面的實證研究加以蒐集並進行歸納分析，試圖發現幼兒數學概念發展之特性，進而探討其在教學上之運用。這些文獻包括：數與量概念發展、幾何與空間概念發展、及邏輯概念發展(如：分類與序列)等方面之研究。

貳、當前幼兒數與量概念發展研究

皮亞傑有關數(分離量)概念發展之主要論點爲：(1)數與其他數學概念之眞正理解是源於兒童的心智發展，這些概念的發展是獨立自發、無人教導的(Piaget, 1953)；(2)保留數目不變性的能力是數學理解的先決條件，兒童到了六歲半左右就會自然發展出這樣的能力(Piaget & Szeminska, 1952)；(3)保留能力涉及了三種邏輯運思之協調——相互性(reciprocity)、恒同性(identity)、與逆反性(negation)(Ginsburg & Opper, 1988; Gross, 1985)。換言之，皮亞傑堅信具邏輯運思本質之數量保留（守恒）能力是數學理解之根基，學前幼兒之心智邏輯能力尙未發展，無法保留數量之不變性，因而無法眞正理解數量。

針對皮亞傑所認定之數學理解先決條件——守恒能力，當前有些研究提出質疑。根據研究報導，守恒實驗本身的知覺線索可以幫助較多的幼兒正確完成保留能力的測試（Miller, Heldmeyer & Miller, 1973），然而某些特徵也會造成知覺上的干擾，影響（誤導）幼兒判斷，降低了保留能力的表現(Bruner, 1964; Gelman, 1969; Miller, Heldmeyer & Miller, 1973)。舉例言之，米勒等人(Miller, Heldmeyer & Miller, 1973)曾用一組保留實驗施測於四歲幼兒：在第一個實驗中特別提供一對一關係的顏色「知覺線索」，且呈非直線排列，在第二個實驗中則仍呈傳統實驗之直線排列，並未提供任何知覺線索，結果幼兒正確守恒率分別爲77%及41%。在此實驗中，研究者將測試實物又恢復爲傳統直線排列(拉長或縮短)，結果能

守恒的幼兒數減少，顯然「長度」是一個主要的知覺干擾因素。有些研究則進而發現保留能力的年齡表現比皮亞傑所認定的六、七歲還要早，三、四歲幼兒就能有守恒表現 (Gelman, 1972; Gelman & Gallistel, 1978; Gelman & Baillargeon, 1983; Silveman & Briga, 1981; Miller, Heldmeyer & Miller, 1973; 劉範，1981，引自李丹，民81)，即使小嬰兒也能對數目持恒 (Antell & Keating, 1983)。甚而有些研究還證實保留概念其實是可以被訓練與教導的 (Gelman & Gallistel, 1978; Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974)；誠如 Murray (1978)所言：「雖然不同的研究法用了不同的教學技術，但無所存疑地，守恒概念是可以被教導的。」這與皮亞傑所稱－－守恒概念是自然衍發、無法教導的，似相背馳。

許多研究均證實幼兒的確有數量方面的能力，對數量概念有一些理解，金斯保 (Ginsburg, 1989) 與巴儒第 (Baroody, 1987) 對幼兒的這些能力統稱之爲「非正式算術」(Informal Arithmetic)，並認爲它是幼兒期最大的成就之一。非正式算術包括多少、序列、同等、唱數、計數、與實用算術等。舉例而言，研究發現即使小嬰兒也具有對數目的直覺，能辨識少量實物間數量的交迭變化 (Strauss & Curtis, 1981; Starkey, Spelke & Gelman, 1983; Antell & keating, 1983; Cooper, 1984)。三、四歲幼兒已能判別二組隨意平放的少量實物，究竟孰多孰少？其判斷是基於直覺的物理外觀，其實這也是合理的策略(Ginsburg, 1989)。

Gelman 等人的一系列研究 (Gelman & Gallistel, 1978；Gelman & Meck, 1983, 1986, 1992; Gelman, Meck & Merkin, 1986; Greeno, Riley & Gelman, 1984; Gelman & Greeno, 1989)顯示三歲幼兒就理解計數實物的概念與原則，這些原則包括固定順序原則(the stable-order principle)、一對一原則 (the one-to-one Principle)、基數原則 (the cardinal Principle)、抽象原則 (the abstraction Principle) 與次序無關原則 (the order-irrelevance Principle)。然而一個成功的計數，還必須要有執行概念的能力，包括評估工作要求的能力 (utilization competence) 和程序性能力 (procedural competence)(Greeno, Riley & Gelman, 1984; Gelman, Meck & Merkin, 1986)，愈年幼者愈缺乏運用與程序能力(如：將數過的東西，推至一邊，或作記號)，但並不代表幼兒無概念上之理解。幼兒在「限制性計數」(constrained counting) 實驗中（一組直線排列的三或五個實物，第二個實物在每一次計數時，必須分別地給予 1、2、3、4、5 的標記），能發

明各樣的正確計數方法，譬如「跳來轉去」(skip-around)、「對應利用」(corres-pondence-capitalize)、「創造」(create)等，充分證明幼兒理解並尊重計數原則(Gelman & Gellistel, 1978; Gelman, Meck & Merkin, 1986)。

研究更指出學前幼兒在每日實際情境問題中，能自創解題策略的「實用算術」，這些策略是從他們原有的「直覺」和「計數」的能力中，自然發展出來的。「你有2個糖果，我再給你5個，你總共有多少個？」對於這樣的生活中問題，二、三歲幼兒還未具有能力理解問題；四歲的幼兒已經知道如何求兩組東西之總和，他用的策略是「計數（點算）所有東西」(counting all)，也就是將兩組東西合起來，從第一組的第一個東西開始數起(1、2)，然後接著數第二組(3、4、5、6、7)，所以答案是7個。五歲的幼兒除了用數全部東西之策略外，甚至能發明更有效率的計算方法——「往上繼續計數」(countion on)，即從第一組東西之數目：2 開始往上繼續計數【2、3(1)、4(2)、5(3)、6(4)、7(5)】，所以答案是7個，不再從第一組的第一件東西：1 開始數。或者更進步的策略是從數目大的那組之數目：5 開始往上計數【5、6(1)、7(2)】。至於減法問題，例如：「小珍有5枝筆，丟了2枝，還剩下幾枝筆？」幼兒則實際拿走2個實物，點算剩下的數目(1、2、3)(Groen & Parkman, 1972; Groen & Resnick, 1977; Gelman & Gallistel, 1978; Starkey & Gelman, 1982; Baroody, 1987; Ginsburg, 1989)。

如果要幼兒加想像中的東西，不予實物操作，則較爲困難，幼兒通常會以手邊的替代物來計算、或用手指、或大聲計數（Starkey & Gelman, 1982; Ginsburg, 1989）。Resnick (1983) 認爲學前幼兒之所以能發明簡單的計數策略，是因爲運用「心理數線」(mental number line) 去表達數目並發展數目的了解。根據研究，大部分幼兒在小學初期仍延用自創的實用算術，但是更趨成熟，已經進展至能心理運算的層次(Madell, 1985; Ginburg, 1989; Carpenter, Carey & Kouba, 1990; Resnick, 1983)，其所發明的減法策略，還涉及「往上增」(incrementing)與「往下減」(decrementing)二策略間的明智選擇」。

總之，根據當前的研究顯示，學前幼兒是有一些數量的理解與能力(非正式算術)，絕非皮亞傑所認定之數學無能，此一立論也爲大陸心理學者所支持。大陸心理學者曾對全國十個地區千名以上三至七歲兒童作了大規模調查研究，結果發現學前幼兒確有相當的能力表現(劉範，1981，引自李丹，民81)。

參、當前幼兒幾何與空間概念發展研究

皮亞傑有關幾何概念之發展，其主要論點爲：學前幼兒幾何概念發展無論是知覺層次(過觸覺和視覺而學習)或概念層次(思考與想像)，均反映「拓樸爲先」(topologyical primacy) 的現象，遵循拓樸幾何(Topology)、繼而投影幾何(Projective Geometry)及歐氏幾何(Euclidean Geometry)之發展路線(Piaget, 1953 ; Piaget & Inhelder, 1967; Smock, 1976; Copeland, 1974; Clement & Battista, 1992)。所謂拓樸幾何即是：「在不管大小或形狀的狀況下，研究空間的關係與形式，其所處理的是開放與封閉圖形，即無論此一圖形如何變形轉換，內與外間、開放與封閉圖形間之差異，並不因之消失」(王文科譯，民81)；因爲拓樸轉變（如拉扯與壓縮）會改變圖形的形狀但包圍性、分離性、次序性、接近性等特質不會改變(Schultz, Colarusso, Strawderman, 1989)。

對於皮氏「拓樸爲先」觀點，當代研究多提出「同時漸進發展」之觀點，即自學前階段始，三種幾何概念就開始萌發、逐漸發展，並日益統整與綜合，而這些概念初始是非常直覺地融於繪畫、建構與知覺的行動中(Clements & Battista, 1992; Rosser, Horan, Mattson & Mazzeo, 1984)。有一些研究駁斥「幼兒空間概念是基於拓樸概念而組織的論點」(Kapadia, 1974, Martin, 1976a; Geeslin & Shar, 1979; Rosser, Campbell & Horan, 1986 ）；例如馬丁(Martin，1976b)發現四歲幼兒的繪畫並未表現出拓樸主導的特徵，拓樸概念並未先於歐氏、投影幾何概念而發展。有些研究進而證實幼兒在學前期已萌發一些歐氏概念、展現歐氏幾何的能力、與保留歐氏幾何的特質(Martin, 1976b; Geeslin & Shar, 1979; Rosser, Mazzeo, & Horan, 1984; Rosser, Campbell & Horan, 1986)；例如羅捨等人(Rosser, Campbell & Horan，1976)發現三至五歲幼兒已能保留歐氏幾何的直線性，歐氏幾何概念在學前期就開始萌發，甚至小至二、三歲幼兒就能區辨直線圖形(Lovell，1959; Page，1959)。誠如道威爾(Dodwell，1971)所言：「皮氏對於認知發展提出太過於簡化的解釋，雖然在別的方面他們仍處於整體性拓樸幾何觀的階段，我們並非

不常發現學前幼兒對於簡單的問題提出正確的歐氏幾何回答。」

有關幼兒幾何概念的發展，有些學者則不涉入拓樸、歐氏等不同幾何學觀點孰先發展之爭執，直接探查幼兒繪畫各種幾何圖形之確切年齡表現 (Ilg & Ames, 1965; Noelting, 1979; 田中敏隆，1966, 引自陳小芬譯，民85)。這些研究顯示最先發展的是圓形，其次是長方形，而後是正方形，接著是三角形，菱形則是最晚發展的(約六、七歲)。至於辨識幾何圖形則較容易，根據研究顯示三歲左右的幼兒就能辨識圓形(李丹，民81)，但若要幼兒辨識轉換的圖形，即經旋轉、翻轉、或移動位置之幾何圖形，則較有困難。因爲學前幼兒基本上是屬於荷蘭學者范希樂(Pierre Van Hiele & Dina Van Hiele Geldof)「幾何思維層級論」－－零至第四層級－－之「零層級」；此階段幼兒之主要特徵是「視象化」，即以視覺的型態－－圖形的整體外觀來辨識圖形，圖形的特質不被意識並了解爲界定圖形的主要因素。簡言之，其思考深受知覺所友配，因之常受圖形無關的屬性所影響，譬如它的方向－－當三角形往下指，或正方形轉45度角，幼兒就無法辨認 (Hoffer, 1983; Van De Walle, 1990)。Vurpillot (1976) 及 Kerslake (1979) 之實證研究即在驗證與描繪零層級幼兒之視象化現象。而范希樂所稱之第一至第四層級，分別爲分析階段、正式推理階段、演繹推理階段、及最後之精確嚴密階段(Hoffer, 1983; Bruni & Seidenstein, 1990; Van De Walle, 1990; Clements & Battista, 1992)，這五個層級並不受年齡之影響，而是經驗與學習的結果。換言之學前幼兒亦可能由於經驗與學習的刺激達第一層級，而成人亦有可能仍停留於第一個層級。而皮亞傑的幾何發展觀是屬於年齡取向的階段論，前運思期幼兒乃處於拓樸主導階段。至於范希樂所指零層級之視象化特徵與皮氏所指學前幼兒之拓樸特質是頗爲相關的，均強調深受整體性外觀知覺所影響。皮氏之實驗說明了學前幼兒可以區辨出開放與封閉圖形之不同，但卻無法指認出各種封閉幾何圖形之不同。而事實上，在拓樸學上，三角形、正方形、長方形等圖形間並無任何之不同(Copeland,1974)。

有關幼兒之空間知覺發展，皮亞傑指出：在感覺動作期末期(約近二歲)，嬰嬰的空間知覺發展有兩個顯著的特性：易受毗鄰物體的淆惑及以自我身體爲參照依據(Gross，1985)。進入前運思期幼兒，雖漸能使用外來的參照架構，但其空間推理判斷常受自我觀點所影響，必須要等到七歲左右才能從不同觀點去看事物。此外，學前幼兒也無法運用自然世界中的參照架構：水平軸與垂直軸(地面、牆面、旗桿等)以研

判物體在空間中彼此之相關位置(Copeland，1974)。

針對以上論點，當前有些研究指出，當嬰幼兒於熟悉的環境中比不熟悉的環境，較易使用外在參照系統來判斷空間關係(Acredolo, 1978)。甚至於知覺環境中的顯著特徵與嬰幼兒是否運用自我或外在的空間參照架構亦有關係。許多研究發現，當環境空間中充滿視覺上顯著突出的路標(Landmark)時，可使幼兒由自我參照架構移轉至其他的參照架構，對於空間推理有所助益 (Acredolo, Pick & Olson, 1975; Acredolo, 1977; Siegel & Schadler, 1977; Acredolo & Evans, 1980)。例如 Acredolo(1977)發現，三、四歲幼兒在被對換位置後，當環境中有顯著的路標時，比在無路標的情況下，較能找到藏匿於杯中之物。路標是環境中的特徵(參照點)，成人與幼兒探索環境時,都是先記住這些路標；它是空間表徵三要素－－路標(landmark)、路線 (route)、及整體外形 (configuration) 中最基本的要素(Siegel & White, 1975)。 此外，亦有研究指出，實驗測試本身的要求也會影響空間推理，其實幼兒有很好的空間知識，但因測試方式的影響而降低其原有表現(Siegel & Schadler, 1997; Liben, Moore & Golbeck, 1982)。舉例而言，李本等人(Liben, Moore, & Golbeck, 1982) 發現：如果測試工作是發生在一個富有生態意義的情境裡，兒童就會有較佳的空間知識，即幼兒在一個熟悉的實際教室裡安排傢俱所呈現的空間知識要比在模型教室裡爲佳。又艾克杜羅等人(Acredolo, Pick & Olson, 1975) 發現，兒童在熟悉的遊戲場內之空間位置記憶表現，比其在走廊之表現要來得好。總之，在適當的環境之下，幼兒的確有一些空間能力，而且其能力往往超乎吾人所認定的，例如，Bluestein 與 Acredolo (1979) 曾發現三歲幼兒能在室內依地圖推論某物在室內的位置，五歲幼兒能在戶外依旋轉90度的地圖推理某物在室內的位置。

綜上所述，當代研究相當肯定學前幼兒於幾何與空間上之能力，並不認同於皮亞傑「拓樸爲先」之幾何發展觀，歐氏與投影幾何概念於學前期就開始萌芽、逐漸發展，而且在適當情境下也會適度表現空間推理，理解空間關係。

肆、當前幼兒邏輯概念發展研究

皮亞傑之認知發展階段論揭示了每個階段之獨特思考結構，尤以前運思期幼兒之獨特智能結構截然不同於其他各期。基本上，前運思期幼兒之思考有幾個特徵：集中化(centering)、注意靜態面而非轉換過程(states vs. transformations)、不可逆性(irreversibility)(Ginsburg & Opper, 1988)，因而在守恒實驗中無法看出邏輯上之不變性(invariance)，或眞正理解與邏輯有關之分類、序列、因果關係等概念。

有一些學者力言皮氏過於低估幼兒的邏輯思考能力，他們指出若研究者之施測內容或方式是對幼兒有意義、可理解的情境，那麼幼兒的表現是超乎皮氏所認定的。例如，Donaldson (1978) 指出，皮氏傳統的「娃娃觀山」測驗若代之以有情境意義的「警察與娃娃捉迷藏」測驗，有90%的三至五歲幼兒能遠離自我中心(decenter)，設法不讓娃娃被警察看到。Berzansky (1971) 指出皮氏要求幼兒用口語回答離其經驗很遠的自然事件之因果關係，如雲、太陽、月亮之移動，結果當然是超乎幼兒能力所及，而以超凡、神奇、或魔術等原因來釋這些現象；若改以具體操作或圖片排列之測試方法，幼兒因果關係思考之表現較佳 (Berzansky, 1971; Schmidt & Paris, 1977; Gelman, 1979;)。例如Gelman (1979) 讓三、四歲幼兒以排列圖片方式取代口語回答，結果發現幼兒能將一組圖片按因果關係排列出正確順序。以及有研究顯示，給予幼兒分類的事物性質會影響幼兒分類能力的表現，若改變施測事物的性質（如：高層概念改爲基層概念，集合改爲群聚），幼兒的表現較佳 (Rosch, Mervis, Gray, Johnson, & Boyos-Braem, 1976; Markman & Siebert, 1976; Markman, 1973)。

研究甚至證實皮氏所指前運思期幼兒邏輯思考上的限制，可以透過適當的訓練予以突破。例如希格爾等人(Siegel, McCabe, Brand & Mattews, 1977, 引自程小危，民81)對三、四歲幼兒在分類實驗上施以口語回饋之訓練，結果發現幼兒均能在典型的「層級包含關係」問題上有進步的表現，尤其是四歲組幼兒；而根據皮亞傑，

眞正理解層級包含關係是必須等到八歲左右。再如前所提及之數量守恆能力，其本質就是邏輯能力，也證實是可以被訓練的。

此外，當前有許多研究亦發現幼兒在很小的時候（五歲以前）就能分類 (Watson, Hayes & Vietze, 1979; Case, 1986; Sugarman, 1981)，然而皮氏卻認爲幼兒在五歲以前根本不會分類，只會聚集一些圖形，如：彼此分離的小線列、集合體、複雜體等 (Piaget & Inhelder, 1967)。而且研究亦指出學前幼兒具有邏輯排序能力，比皮亞傑所認定的年齡表現還要早 (Brainerd, 1973; Koslowski, 1980)。也有一些實證研究發現幼兒在熟悉的知識領域內，其類比推理的表現較佳 (Genter, 1989; Sternberg & Nigro, 1980; 張麗芬，民82)。又「後皮亞傑學派」(Post-Piagetian) 認爲，幼兒在他們豐富經驗的領域內，會運用較爲進步的推理模式，而且學前幼兒比皮亞傑所認爲的更具有能力 (Inagaki, 1992)。

皮氏認爲前運思期與具體運思期幼童，在思考結構上最大的差異是後者具有逆向思考的能力，這對前運思期幼兒而言是做不到的。舉如在從事分類活動時，一旦整體分成幾個部份，幼兒就無法來回地思索「部份」與「整體」，同時作兩個相反的心智活動。然而凱斯 (Case, 1986) 的研究卻證實五歲幼兒即具備此種逆向思考的能力。在一個平衡秤重實驗裡，凱斯設計一個讓幼兒爲了要完成第二項測試問題 (秤盤的那一邊會「上升」？)，必須倒反原本成功地用於第一項測試問題(秤盤的那邊會「下降」？）的思考模式的測試方法；也就是爲了完成測試，幼兒必須理解二項測試間的可逆性關係，結果發現五歲幼兒即能呈現這樣的理解。

凱斯還發現兒童之邏輯思考是從嬰孩起就持續變化、穩定成長，以平衡稱重的實驗爲例，三至九歲幼兒預測天平的那一邊會下降，始於知覺重量、繼而計數、爾後注意支點距離，最後抵統整考慮重量、數目、支點距離三向度之境界，乃爲逐漸發展之趨勢。此一漸進增長的發展論調，與皮氏宣稱之邏輯思考驟生於具體運思期之突速發展「階段論」大異其趣，而事實上，有諸多學者對漸進發展論投以回響(Starkey & Gelman, 1982；Resnick, 1983；Pascual-Leone, 1980; Ginsburg, 1989)。以金斯保 (Ginsburg, 1989) 論及幼兒之序列能力爲例，他認爲在皮氏第一階段之幼兒有些能作到小部份排序，或頂端部份成序列狀 (底端參差排列)，以及第二階段幼兒雖無法統合考慮，使用系統化比較方法，但他能經由嘗試錯誤方式排出序列，可見幼兒還是有一些基本的序列概念。金斯保把幼兒的這項能力，歸入非正式算術的重要項

目，認為它是幼兒期最大的成就之一。金氏所要傳達的訊息是幼兒的能力是始於微弱、有限制，繼而漸進發展、日趨成熟的，吾人應看重幼兒所能之事，而非一味地論其無能之處。

以上種種研究充份顯示，學前幼兒不是沒有邏輯、知識的小人兒(柯華葳, 民84), 並非像皮氏所稱，一直要等到具體運思期才突速發展邏輯運思。其實幼兒是有邏輯思考力的，幼兒的分類、排序、因果思考等邏輯能力是從嬰兒期就逐漸發展的，也許如同斯塔基與葛爾蔓 (Starkey & Gelman, 1982) 或金斯保所言是有限制的、脆弱的(fragile)，重要的是如何去培養它、轉化它、與提昇它；尤其是在面對未來紀元高度競爭之挑戰下，以推理、解題為趨向勢必成為未來幼兒數學教育目標，因而吾人更應珍視幼兒的邏輯思考能力。

伍、當前幼兒數學研究對教育之意涵

一、幼兒數學概念發展之特質

綜觀上述幼兒數與量、幾何與空間、及邏輯概念發展之研究，充份顯示學前兒童確實具有相當的能力，能呈現一些邏輯運思，對數學概念有一些理解；而非如皮亞傑所堅稱：學前幼兒心智邏輯能力尚未發展，無法眞正理解數學概念。幼兒概念之發展是歷經年月，由點滴逐漸成長的，因而概念本身的脆弱與不成熟是無可避免的，但絕不表示沒有能力，完全處於「數學無能期」。誠如葛爾蔓與葛莉絲緹 (Gelman & Gallistel, 1978) 所言，吾人應正視幼兒可以做之事，而非焦注於其所不能。綜上所述，為更理解幼兒數學概念發展之特性，作者以數與量概念的發展為例，進一步闡釋之：

（一）自發與自導性

幼兒的非正式算術多半是自我啓動、自我引導，他們非常喜歡唱數，不斷地「唱」著，並自我糾正或自動請教親長；甚而見數即數，重覆練習，樂此不疲。尤其他們所發明的「數全部的」、「往上繼續計數」、「上增」、「下減」等加減法計算策略，也常是為解決生活中之實際問題，自發自導地從其計數實物的直覺想法中，心

領神會而發展出來的。基本上，幼兒具有熱切的學習動力，好奇並渴望理解周遭世界，是個活躍的學習者。

（二）建構與發明性

幼兒自創的加、減實用算術策略例如「數全部的」與「往上繼續計數」，實爲「計數」的延伸，與計數實物密切相關；足見幼兒絕不是一個空白的容器(如同吸收論之觀點)，新的知識（實用算術）是建構在舊有的認知結構上(計數)並與之交相聯結(周淑惠，民84)。「往上繼續計數」與「數全部的」加法策略，甚而選擇性「上增」、「下減」的減法策略是幼兒自己的發明，完全未經他人教導，正如同語文之「讀寫萌發」(emergent literacy)情形一樣，幼兒能在自然情境中自創文字。事實顯示幼童之建構能力是令人稱奇的，例如卡蜜(Kamii, 1985, 1989)曾刻意不教一、二年級幼童傳統正規的加減運算方法（諸如：19+18=？9+8=17，寫7進1，1+1+1=3，答37)，完全由學童思考、「發明」(發現)(reinvent)，結果發現他們能建構各種解答策略，例如：(19+20=39，39-2=37)、(18+20=38，38-1=37)、(20+20=40，40-2-1=37)、・・・。金斯保(Ginsburg, 1989)也發現學童在無人教導下能發明各式各樣的演算方法。

（三）情境與實用性

幼兒的實用算術大體上是在日常生活與遊戲情境中爲解決問題而衍發的，與每日生活密不可分，實具有情境意義與解決問題之實用意義。生活中諸如：「一包糖果有十二顆，我和妹妹平分每人分到幾顆？」等問題層出不窮，也唯有在有意義的情境下，幼兒方能理解數學，對數學發生興趣，富情境與實用性的幼兒數學，實予吾人教學之重大啓示。

（四）直覺與具體性

實用算術是幼兒在不會正規演算方法時，從其現有的認知架構中－－即直覺想法中(唱數、計數)建構出解決策略。直覺式(非正式)的數學當然不是很成熟，但它的存在代表了幼兒在學習過程中扮演了思考的角色。舉例而言，老師示以幼兒八隻小雞，然後背著幼兒視線不知拿走幾隻小雞，最後只剩下五隻小雞教具出現在小朋友面前，老師問：「老鷹抓走了幾隻小雞？」有小朋友答：「三隻，因爲這裡有五隻，所以六(1)、七(2)、八(3)，剩下三隻（指著空白的地方三次，分說六、七、八)+」這種用「往上加」的辦法來解決減法的問題，其實是相當聰明的。此外，幼兒的數學也是

具體的，若要他們計算想像中的事物，就必須找替代物(如：手指頭、積木)，這樣的特性在教學上足以令人省思。

皮亞傑雖然低估幼兒的能力，但對於知識獲得之觀點與上所歸納之幼兒數學概念發展特性——自發自導、建構發明、直覺具體等，頗爲相吻。根據皮亞傑之動態均衡理論(the equilibration theory)，認知發展是一種個人在環境中爲解決認知衝突，透過同化與調適二種功能，以達均衡狀態的內在自我規制過程(Piaget, 1976)。換言之，知識之產生是主體(兒童)經由其內在活躍的心靈活動所建構而來的，它是自我啓動、自我管制的過程。學習者並非僅僅是累加堆積新訊息於既有貯存之知識系統中，他們必須將新資訊與已建立的知識結構相互交織聯結，並且在這些結構中建構新的關係網。故而，兒童的學習乃是內在自導與建構的一個歷程。皮亞傑言：「要理解就必須去發現」(Piaget, 1973a)，「理解一個理論或要義，意謂這個理論被這個主體再發現（明）(reinvention)」(Piaget, 1973b)。如果一個兒童運用由左至右、由右至左、或由中間開始等各直覺方式計數小石頭，結果發現：計數的順序對於石頭的總數不發生影響，數目總是相同的，此一發現帶給兒童眞正的理解。以上提及幼兒之非正式算術就是一種直覺想法，也是幼兒的發現（明），代表心靈內部努力建構的成果。又皮亞傑言：「知識的源起非僅存於物體本身，也非僅存於主體本身，而是在於二者間緊密地交互作用。」(Piaget, 1976)幼兒計數石頭之實例充份說明了：幼童所發現的知識是由他自己(主體)操作小石頭(物體)時，對於其自身操作行動(計數石頭)的內在省思而來的，具體操作與心靈思考均十分重要。

二、對幼兒教育之意涵

幼兒具有一些能力與概念理解，然而這些能力是有限制的、脆弱的，如同Vygotsky (1978) 所指——近側發展區 (The Zone of Proximal Development) 中的能力一樣，是在成熟的過程之中，但尚未完全純熟。教學是應行於發展之前，不能坐等發展 (Vygotsky, 1978)，如何去強化、穩固與提昇這些能力，使其長足充份發展，成爲教育之重要課題，況且許多研究均證實幼兒的保留、分類、邏輯等數學能力是可以經由訓練而獲益的。從以上諸多研究中，筆者歸納出幼兒數學概念的發展重要特質爲自發自導性、建構發明性、情境實用性、及直覺具體性，因而幼兒之數學教育應考量這些重要特質以及幼兒能力的特性，予以適切引導。吾人以爲今後幼兒數學

教育之首要任務是：提供一個豐富且刺激性的環境來回應與支持幼兒的興趣、能力、及概念發展特性。所謂豐富且刺激的環境包括了人為的支持、協助、與各種具體可數實物、玩具、教具的提供；不過人為的支持、協助是以回應幼兒的興趣、能力為原則，基本上，是以幼兒為中心的。換言之，幼兒喜歡唱數就順著他的興趣，陪他唱數，適時地指出他的錯誤；喜歡計數就供給他各式可數實物、教具去點算計數，教他計數技巧；喜歡數的運算，就在日常生活中提供實際的解題情境，並以各樣問題刺激與教導其思考能力。有些類似布魯納 (Bruner) 所倡之「鷹架式」(scaffolding) 教學支持(Smith, 1992; 江文慈, 民81)，強化老師在幼兒學習中的角色，使正在發展、成熟之中的能力，達到最大的發展。

數學學習理論素來即有吸收論(Absorption Theory)與建構論(Cons-truction Theory)之爭(Baroody, 1987)，筆者以為如何在極端的自我建構與傳授灌輸間維持一均衡點，即為鷹架式教學支持的要義，也是今後教學的趨勢。當前的許多學者也認為在兒童建構知識的過程中，某些知識傳授及接受式學習也是必要的。舉例而言，雷斯妮(Resnick, 1987; Resnick & Omanson, 1987)對皮亞傑所言：「要了解就必須去發現。」(to understand is to invent) 提出了反駁：「雖然兒童能夠發明，並不能保證他一定就能理解。」例如「他們所發明的錯誤演算程序(減法)，它也是一種心靈思考的結果；但究竟還是錯了，未能眞正理解・・・因此，在其學習過程中某種介入(intervention)還是必要的。」她指出：「『想要在一個皮亞傑的數學方案裡，傳授重要知識』的這種兩難情境，至今仍未完全解決。」(Resnick & Klopfer, 1989)。金斯保(Ginsburg, 1981)也指出：「教育的目的之一是促進接收性學習，有時學生也須接受一些背誦記憶式的學習，皮亞傑的理論並未對接收式學習提供合理的解釋。如果老師的教學能促進兒童重新發現，那麼老師的『教學講述』(instruction)和『重新發現』(reinvention)是有同等價值的。」至於鷹架式教學支持，乃包含下列幾項具體教學原則：

（一）生活化

人類生存在幾何空間中，無法獨立於幾何空間之外，而且其生活也與數量活動、邏輯思維息息相關，密不可分。生活既與數學無可剝離，從生活中學數學，深具自然性、實用性、與意義性，不僅可增進幼兒概念理解，而且還可縮減幼兒對數學的心理距離，甚或懼怕。況且幼兒的非正式算術本來就是在日常生活中受到實用價值的激勵

自然衍發而來，那麼我們就應該多讓幼兒從生活中耳濡目染，引發其興趣，並進而實際運用於生活之中。

幼兒數學教育要儘量從生活中取材、隨機教導，例如點心的取用可設計成涉及數的「合成、分解」概念(如：1草莓4巧克力、2草莓3巧克力、3草莓2巧克力...)；又如幼兒活動室中之垃圾分類、遊戲活動結束後之玩具歸位與分類，或在排隊集合時比較誰長得最高、走得最快？都和數學有關。簡言之，幼兒數學不能剝離情境，必須緊密融入幼兒生活之中。

（二）遊戲化

遊戲化教學是激發幼兒對數學發生興趣最直接的方法，因爲幼兒的生活本就是以遊戲爲重心。遊戲化包括角落自由探索遊戲(free play)(例如娃娃家買賣遊戲、積木角建構空間與造形的活動)，以及操作各種紙卡、盤面、骰子等教(玩)具，與進行體能、音樂所構成的小組或團體遊戲。數學遊戲化的結果，不但能讓幼兒在輕鬆自然氣氛下學到數學，而且也能讓其喜歡數學。例如幼兒擲骰子，以二只骰面數目之和作爲紙板上前進格數依據之「尋寶遊戲」，幼兒在歡愉且熱切氣氛下，不但習得加法運算技能，而且也對數學發生濃厚興趣。Elkind (1989) 所言甚是：在任何時候，一盎司的動機都等值於一磅的技能，有了興趣，就有動機，精熟數學知識與技巧則指日可待。

（三）解題化

學前幼兒能在無人教導下，發明非正式數學，足證幼兒絕非是一個被動收受的空白器皿，而是一個有思考，有能力建構知識的個體，因而幼兒的數學教學應摒棄全然填塞灌輸模式，多強調一些解決問題與推理能力的培養。教學若瀰漫解題氣氛，那麼活動室裏將洋溢著與生活有關的各種「情境問題」，並充滿刺激思考的問話與對話；幼兒們則在教師的協助下忙著以各種方式尋求解答，例如：操作教具、與其他幼兒或教師相互討論、將問題以行動演示出來、在紙上畫圖表等。在幼兒與教師攜手走過解題過程時，必須伴有不斷的開放式問題(open-ended question)，以引發擴散性思考；柯烈特等人(Cliatt, et. al., 1980, cited from Worth, 1990) 曾指出幼稚園階段幼兒若重覆地處於擴散思考情境中，其擴散思考能力會提昇。因而教師在幼兒決問題情境中，應常提出類似「爲什麼？」「怎麼做的？」「有什麼不一樣？」「還有別的方法嗎？」等問話。

（四）具體化

幼兒期的數學教學模式可稱之爲「行動模式」(action model)(Nelson & Kirkpatrick, 1988)；因爲幼兒的數學是非常具體的，純粹的紙筆作業、操弄抽象符號實與幼兒的自然學習不符，對數學概念的發展沒有助益。其實，皮亞傑也主張：「在數學教育上，我們必須強調行動(action)的角色，特別是幼兒，操作物體對理解算術是不可或缺的。」(Piaget, 1973)。事實上，大部份的研究也證實教具對於概念的獲得確有功效(Kieren, 1971; Fennema, 1972; Fuson & Briars, 1990; Wearne & Hiebert, 1988; Hiebert, Wearne & Taber, 1991; Suydam & Higgins, 1976)。

（五）直覺化

所謂直覺化教學乃將教學植基於幼兒直覺想法之上，與其直覺想法聯結，並多加鼓勵其非正式想法。幼兒的直覺想法對幼兒而言是有實質意義的，是他可以理解的，也是他建構知識的基礎；學前幼兒所發明的實用算術策略，就是源於既有認知結構中之直覺想法。許多兒童學習數學之所以有困難是因爲『認知分裂』(cognitive schizophrenia)所致，此乃意指兒童未能聯結他們自己的非正式知識（直覺想法、數學常識）與他們在學校裡所學的(Ginsburg & Asmussen, 1988)。因此吾人在教學時應多鼓勵幼兒說出他的想法，重視他所發明的非標準化的演算或解題思考方法，以此爲基礎，設法引導幼兒理解標準化的正式數學。其實，皮亞傑也相當重視兒童的直覺想法，爲達邏輯數學(Logical-Mathematical)結構，皮亞傑(1973)提出了三個教學原則:(1)促進幼兒自行發明(現)；(2)幫助幼兒意識化其隱晦不明的直覺想法；(3)幼兒的直覺想法必先於正式化教學。

（六）互動化

教師於教學時，無論是設計解題情境或遊戲情境，都應儘量提供並鼓勵幼兒與幼兒間、幼兒與教師間的互動交流，許多的研究均示顯示社會交流能刺激兒童的省思能力，對知識建構頗有幫助（Doise & Mugny, 1984; Perret-clermont, 1980, cited from Kamii, 1985, 1989; Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974）。這樣的互動不但會強化「數學是可以被思考的」和「數學涉及理解」的信念(Cobb, 1985)，而且透過與成人的互動，或較有能力同儕的協助，可促進近側發展區內尚未成熟能力的發展(Vygotsky, 1978)。

陸、結　論

本研究經文獻探討結果，發現學前幼兒具有一些能力與概念理解，絕非皮亞傑所認定之「數學無能」，幼兒之能力表現於三方面：

一、數量

學前幼兒具有一些數量的理解與能力，這些能力統稱之爲非正式算術，包括多少、序列、同等、唱數、計數、及實用算術等；它是逐漸成長、日益精進的，尤以自創的實用算術(數全部的、往上繼續計數、上增、下減等加減法策略)爲例，初始非常具體，而在小學初期，已發展至心理運算的層次。

二、幾何與空間

學前幼兒具有一些幾何與空間能力，拓樸幾何、歐氏幾何與投影幾何三種概念已開始萌發並逐漸發展與統合；而在某些情境下(如熟悉場所、增設路標) 幼兒也會適度表現空間推理、理解空間關係。

三、邏輯

學前幼兒具有一些邏輯思考能力，例如：分類、排序、因果思考等，這些能力其實是從嬰兒期就漸進發展、日趨純熟的。

總之，幼兒是有能力的，然而幼兒的能力是逐漸萌發、日益精進的，脆弱、有限制、及非常具體化是幼兒數學的特性，如何去提昇與轉化這些能力使之趨於成熟，是教學上之重大任務。此外，本研究亦發現幼兒數學概念之發展具有自發自導性、建構發明性、情境實用性、直覺具體性等重要特質。依據幼兒數學之特性及幼兒概念發展之特性，筆者以爲幼兒數學教育首須提供一個豐富且刺激性的環境，以鷹架式的支持來引導幼兒，促進其概念與能力之成熟發展。換言之，教師必須在極端自我建構及傳統教學傳授間尋求新的平衡點，完全的自我建構與全然的貫輸塡鴨均非所欲，此一教學觀點亦爲當前許多學者所認同。至於具體的教學原則包括：生活化、遊戲化、解題化、直覺化、具體化及互動化。

參考文獻

王文科譯(民81)。兒童的認知發展導論。台北：文景出版社。

王素芸(民77)。學前兒童空間概念之研究。文化大學碩士論文。

江文慈(民81)。「斐哥斯基『近側發展區』之基本概念及其在教學上的應用」, 現代教育, 28, 145-156。

李丹編(民81)。兒童發展。台北：五南圖書出版公司。

林清山譯(民83)。教育心理學：認知取向。台北：遠流出版公司。

吳貞祥(民79)。「幼兒的量與空間概念的發展」。國教月刊，37(1,2)，頁1-10。

周淑惠(民82)。「幼兒數概念發展及其教學原則」。載於教育部研習資料，台北：教育部。

周淑惠(民84)。幼兒數學新論－－教材教法。台北：心理出版社。

柯華葳(民84)。「學前的孩子不是沒有邏輯、知識的小人兒」, 新幼教, 5,21-23。

孫佳曆、華意蓉譯(民76)。兒童心理學。台北：五洲出版社。

陳小芬譯(民83)。幼兒發展與輔導。台北：五南圖書出版公司。

陸有銓、華意蓉譯(民78)。兒童的早期邏輯發展。台北：五洲出版社。

張麗芬(民82)。幼兒類比推理能力之研究。政治大學博士論文。

程小危(民81)。「學前到學齡階段認知發展歷程」。載於蘇建文等著，發展心理學，台北：心理出版社。

盧素碧(民82)。幼兒的發展與輔導。台北：文景書局。

Acredolo, L.P. (1977). Developmental changes in the ability to coordinate perspectives of large-scale space. Developmental Psychology, 13(1), 1-8.

Acredolo, L.P. (1978). The development of spatial orientation in infancy. Dvelopmental Psychology, 14, 224-234.

Acredolo, L.P. & Evans, D. (1980). Developmental changes in the effects of landmarks on infant's spatial behavior. Developmental Psychology, 16, 312-318.

Acredolo, L.P., Pick, H.L. & Olson, M.G. (1975). Environmental differentiation and familiarity as determinants of children's memory for spatial location. Developmental Psychology, 11(4), 495-501.

Antell, S.E. & Keating, D.P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. Child Development, 54, 695-701.

Baroody, A.J. (1987). Children's mathematical thinking: a developmental framework for preschool, primary, and special education teachers. New York: Teachers College.

Baroody, A.J. (1992). The Development of preschoolers' counting skill and principles. In J. Bideaud, C. Meljac, & J.P. Fischer (Eds.), Pathways to number: children's developing numerical abilities. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Berzansky, M.(1971). The role of familiarity in children's explorations of psysical causality,.Child Development,42,705-715.

Bluestein, N. & Acredolo, L.P. (1979). Developmental changes in mapreading skills, Child Development, 50, 691-697.

Brainerd, C.J.(1974). Inducing ordinal and cardinal representations of the first five natural numbers. Journal of Experimental Child Psychology, 18, 520-534.

Bruner, J. S.(1964). On the course of cognitive growth. American Psychologist, 19, 1-15.

Bruni, J.V. & Seidenstein, R.B. (1990). Geometric conceptsand spatial sense. In J.N. Payne (Ed.), Mathematics for the young child. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Burger, W. & Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of developmentin geometry. Journal for Research in Mathematics Education, 17, 31-48.

Case, R. (1986). Intellectual development: birth to adulthood. New York: Academic Press.

Carpenter, T.P., Carey, D.,& Kouba, V. (1990). A problem-solving approach to the operations. In J.N. Payne (Ed.), Mathematics for the young child. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Clements, D.H. & Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan Publishing Co., Inc.

Cobb, P. (1985). A reaction to three early number papers. Journl for Research in Mathematics Education. 16, 141-145.

Cooper, R.G.(1984). Early number development: discovering number space with addition and subtraction. In Sophian, C.(ed.). Orgins of cognitive skills. Hillsdale, N.J : lawrence Erlbaun Associates.

Copeland, R.W. (1974). How children learn mathematics: teaching implications of Piaget's research, 2nd ed. New York: Macmillan Publishing Co., Inc.

Dodwell, P.C. (1971). Children's perception and their understanding of geometrical ideas. In M.F. Rosskopf, L.P. Steffe & S. Taback (Eds.), Piagetian cognitive- development research and mathematical education. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Donaldson, M.(1978). Children's minds. New York: W.W. Norton.

Elkind, D. (1989). Miseducation: preschoolers at risk. New York: Alfred A. Knopf, Inc.

Fennema, E. (1972). Models and Mathematics. Arithmetic Teacher, 19 Dec., 635-640.

Fuson, K.C. & Briars, D.J. (1990). Using a Base-Ten Blocks learning/

teaching approach for first and second grade place value and multidigit addition and subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 21 (May), 180-206.

Geeslin, W.E. & Shar, A.O. (1979). Alternative model decribing spatial references: Topological and gemetric concepts. Journal of Research in Mathematics Education, 10, 57-68.

Gelman, R. (1979). Preschool thought. American Psychologist, 34(10), 900-905.

Gelman, R. (1969). Conservation acquisition: A problem of learning to attend to relevant attributes. Journal of Experimental Child Psychology, 7(Apr.), 167-187.

Gelman, R. (1972). The nature and development of early number concepts. In Reese, H.(Ed.), Advances in child developmentand behavior (Vol.7) New York: Academic Press.

Gelman, R. & Baillargeon, R. (1983). A review of Piagetian concepts. In.P.H. Mussen (Ed.), Handbook of Child Psychology. New York: John Wiley & Son.

Gelman, R., & Gallistel, C.R. (1978). The child's understanding of number. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gelman, R., & Meck, E. (1986). The notion of principle: the case of counting. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedral knowledge: the case of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gelman, R., & Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: principles before skill. Cognition, 13, 343-359.

Gelman, R., & Greeno, G. (1989). On the nature of competence: principles for understanding in a domain. In L. B. Resnick (Ed.), Knowing, learning and instruction: essays in honor of Rober Glaser. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gelman, R., Meck, E., & Merkin, S. (1986). Young children's numerical competence. Cognitive Development. 1, 1-29.

Gelman, R., & Meck, E. (1992). Early principles aid initial but not later conceptions of number. In J. Bideaud, C. Meljac & Fischer (Eds.), Pathways to number. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Ginsburg, H. P. (1981). Piager and education: the contributions and limits of genetic epistemology. In I. E. Sigel., D. M. Brodzinsky, & R. M. Golinkoff (Eds.), New directions in Pigetian theory and practice. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ginsburg, H. P. (1989). Children's arithmetic: how they learn it and how you teach it, 2nd ed. Austin, Tex.: Pro-Ed.

Ginsburg, H.P. & Opper, S. (1988). Piaget's theory of intellectual development. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

Ginsburg, H. P., & Asmussen, K. A. (1988). Hot mathematics, in G. B. Saxe, & M. Gearhart (Eds.), Children's mathematics :new directions for child development. San Francisco: Jossey-Bass.

Greeno J. G., Riley, M. S., & Gelman, R. (1984). Conceptual competence and children's counting. Cognitive Psychology, 16, 94-143.

Groen, G.J., & Parkman, J.M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. Psychological Review, 79(4), 329-343.

Groen, G.J. & Resnick, L.B. (1977). Can preschool children invent addition algorithms? Journal of Educational Psychology, 69, 645-652.

Gross, T.F. (1985). Cognitive development. Monterey,CA: Brooks/Cole Publishing Company.

Hiebert, J.,Wearne, D. & Taber, S. (1991). Fourth graders' gradual construction of decimal fractions during instruction using different physical representations. Elementary School Journal, 91 (March), 32-341.

Hoffer, A.R. (1983). Van Hiele-based research. In R. Lesh & M. Landau

(Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic Press.

Ilg, F.L. & Ames, L.B.(1965). School Readiness: behavior tests used at the Gessel Institute. New York: Harper & Row,.

Inagaki, K.(1992). Piagetian and post-Piagetian conceptions of development and their implications for science education in early childhood. Early Childhood Research Quarterly, 7, 115-133.

Inhelder, B., Sinclair, H. & Bovet, M. (1974). Learning and the development of cogintion. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Kamii, C. (1985). Young children reinvent arithmetic: implictions of Piaget's theory. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (1989). Young children reinvent arithmetic (2nd grade): implications of Piaget's theory. New York: Teachers College Press.

Kapadia, R. (1974). A critical examination of Piaget-Inhelder's view on Topology. Educational Studies in Mathematics, 5(4), 419-424.

Kerslake, D. (1979). Visual mathematics, Mathematics in School, 8(2), 34-35. Kieren, T.E. (1971). Manipulative activity in mathematics learning. Journal for Research in Mathematics Education, 2 (May), 228-234.

Koslowski, B.(1980). Quantitative and qualitative changes in the development of seriation. Merrill Palmer Quarterly, 26, 391-405.

Liben, L.S., Moore, M.L. & Golbeck, S.L. (1982). Preschoolers' knowledge of their classroom environment: evidence from small-scale and life size spatial task. Child Development, 53, 1275-1284.

Lovell, K. (1959). A follow-up sttudy of some aspects of the work of Piget and Inhelder on the child's conception of space. British Journal of Educational Psychology, 29, 104-117.

Madell, R. (1985). Children's natural processes. Arithmetic Teacher, 32, 20-22.

Markman, E.M. & Siebert, J.(1976). Classes and collections: Internal organization and resulting holistic properties. Cognitive Psychology, 8, 561-577.

Markman, E.M.(1973). Facilitation of part-whole comparisons by use of the collective noun "family". Child Development, 44, 837-840.

Martin, J.L. (1976a). An analysis of some of Piaget's topological tasks from a mathematicalpoint of view. Journal of Research in Mathematics Education, 7, 8-24.

Martin, J.L. (1976b). A test with selected topological properties of Piaget's hypothesis concerning the spatial representation of the young child. Journal for Research in Mathematics Education, 7(1), 26-38.

Miller, P.H., Heldmeyer, K.H., & Miller, S.A.(1973). Facilitation of conservation of number in young children. Report no.20 Developmental program, Department of Psychology. The University of Michigan.

Murray, G.B.(1978). Teaching strategies and conservation training. In A.M. Lesgold, J.W. Pellegrino, S.D. Fokkema, & R. Glaser(eds.). Cognitive psychology and instruction. New York: Plenum Press.

Nelson, L.D. & Kirkpatrick, J.(1988). Problem solving. In J.A. Payne (Ed.), Mathematics learning in early childhood (7th ed.) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Noelting, G.(1979). Hierarchy and process in the construction of the geometrical figure in the child and adolescent, Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education, University of Warwick.

Page, E.I.(1959). Haptic perception: A consideration of one of the investigations of Piaget and Inhelder. Educational Review, II, 115-124.

Pascual-Leone, J.(1980). Constructive problems for constructive theories: the current relevance of Piaget's work and a critique of information-processing simulation psychology. In R.H. Kluwe & H. Spada (Ed.), Developmental models of thinking. New York Academic Press.

Piaget, J. (1953). How children form mathematical concepts. Scientific American, 189(5), 74-79.

Piaget,J. (1973a). To understand is to invent: the future of education (G. and A. Roberts Trans.). New York: Grossman.

Piaget,J. (1973b). Comments on mathematical education. In A.G. Howson (Ed.), Developments in mathematical eduation: Proceedings of the second international congress on mathematical education. London: Cambridge University Press.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1967). The child's conception of space. London: Routledge & Kegan Paul Ltd.

Piaget,J. .& Szeminska, A. (1952). Child's conception of number (C. Gattegno and F. M. Hodgson, Trans.). New York: The Humanities Press Inc. (Original work published 1941)

Resnick, L.B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Ed.). The development of mathematical thinking. New York: Academic Press, Inc.

Resnick, L. B. (1987). Constructing knowledge in school. In Liben , L. (Ed.), Development & Learning: conflict or congruence. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick, L.B., & Klopfer, L.E.(1989). Toward the thinking curriculum: an overview. In L.B. Resnick, & L.E. Kopfer (Ed.), Toward the thinking curriculum: current cognitive research. 1989 Yearbook: the Association for Supervision and Cruuiculum Development.

Resnick, L.B. & Omanson, S.F. (1987). Learning to understand arithmetic. In Glaser, R.(Ed.), Advances in instructional psychology (Vol.

3). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Rosch, E., Mervis, C.B., Gray, W., Jonson, D. & Boyes-Braem, P.(1976). Basic objects in natural categories. Cognitive Psychology, 3, 382-439.

Rosser, R.A, Campbell, K.P. & Horan, P.F. (1986). The differential salience of spatial information feturess in the geometric reproductions of young children. The Journal of Genetic Psychology, 147(4), 447-455.

Rosser, R.A., Horan, P.F., Mattson, S.L. & Mazzeo, J.(1984). Comprehension of Euclidean space in young children: the early emergence of understanding and its limits. Genetic Psychology Monographs, 110, 21-41.

Rosser, R.A., Mazzeo, J. & Horan, P.F. (1984). Reconceptualizing perceptual development: the identification of some dimensions of spatial competence in young children. Contemporary Educational Psychology, 9, 125-15.

Schmidt, C.R. & Paris, S.G.(1977). Children's understanding of causal sequence. Paper presented at the bienniel meeting of the Society for Research in Child Development, New Orleans.

Schultz, K.A., Colarusso, R.P., & Strawderman, V.W. (1989). Mathematics for every young child. Columbus, Ohio: Bell & Howell.

Siegel, A.W. & White, S.H. (1975). The development of spatial representations of large-scale environments. In' H. Reese (Ed.), Advances in child development and behavior(Vol. 10). New York: Academic Press.

Siegel, A. W. & Schadler, M. (1977). The development of young children's spatial representations of their classroom. Child Development, 48, 388-394.

Siverman, I.W. & Briga, J.(1981). By what process do young children solve small number conservation problems? Journal of Experimental Child Psychology, 32, 115-126.

Smith, A.B.(1992). Early childhood education: Seeking a theoretical framework in Vygotsky's work. ERIC, ED 355 010.

Smock, C.D. (1976). Piaget's thinking about the development of space concepts and geometry. In J.L. Martin (Ed.), Space and Geometry.

Sternberg, R.J. & Nigro, G.(1980). Selection and implementation of strategies in reasoning by analogy. Journal of Educational Psychology, 74, 379-413.

Starkey, P., & Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction sbilities prior to formal schooling in arithmetic. In T.P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: a cognitive Perspective. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Starkey, P., Spelke, E.S., & Gelman, R.(1983). Detection of intermodal numerical correspondences by human infants. Science, 222, 179-181.

Strauss, M.S., & Curtis, L.E.(1981). Infant perception of numerosity. Child Development, 52, 1146-1152.

Sugarman, S.(1981). The cognitive basis of classification in very young children: an analysis of object ordering trends. Child Development, 52, 1172-1178.

Suydam, M.N. & Higgins, J.L. (1976). Review and synthesis of studies of activity- based apporaches to mathematics teaching. Final Report, NIC Contract No. 400- 75-0063(Also available from Columbus, Ohio: ERIC, 1977).

Van De Walle, J.A. (1990). Elementary school mathematics: teaching developmentally. White Plains, N.Y.: Longman.

Vurpillot, E. (1976). The visual world of the child. London: George Allen & Unwin.

Vygotsky, L.S.(1978). Mind in society: the development of higher psychological process. Cambridge, MA: Harvard University.

Watson, J.S., Hayes, L.A. & Vietze, P.(1979). Bidimensional sorting in preschoolers with an instrumental learning task. Child Development, 50, 1178-1183.

Wearne, D & Hiebert, J. (1988). Acognitive approach to meaningful mathematics instruction: tesing a local theory using decimal numbers. Journal for Research in Mathematics Education, 19, 371-384.

Worth, J.(1990). Developing problem-solving abilities and attitudes. In J.N. Payne (Ed.), Mathematics for the young child. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Contemporary Research on Early Childhood Mathematics and Its Educational Implication

Su-Hui Chou

National Hsinchu Teachers, College

Abstract

Jean Piaget is the foremost figure in studying the development of young children's mathematical concepts. Basically, his tenet of theory is that mathematics is logical in nature and that preschooler is short of logical thinking; young child, therefore, is mathematically incapable. Recently, the research in the development of mathematical concept of young children burgeons prosperously and is found in the subfields of mathematics such as number, geometry... etc. Moreover, most findings of these studies seem to be different from Piaget's assumption. Nevertheless, most of the publications in early childhood mathematics education for the time being are still based on Piaget's theory. On the other hand, Piaget himself seldom mentioned about the educational implications of his theoy. Hence, there is an urgent need to study and integrate present studies in order to investigate the developmental characteristics of young children's mathematics concept and further to explicate its educational implication.

This article adopts literature review as its main research method. The findings are: (1)preschoolers are indeed competent in mathematics such as "informal arithmetic" ; (2)the competences of young children burgeon from birth and Progress continuously and gradually, their capabilities, therefore, are weak and have limits in some way; (3)the developmental characteristics of young children's mathematical concept are self-directive, self-constructive, contextual and intuitive in nature. Based on the findings, the educational implication, therefore, is to provide young children with rich and stimulative environment in order to support and response to their developmental characteristics. Generally, the author agrees what Bruner mentions "scaffording support" in instruction.

The main purpose is to allow young children's competences (undergoing development) to reach full mature and development. Some instructional principles are suggested: play-oriented, experience-oriented, problem solving-oriented, intuition-oriented, and concretion-oriented principles.