國民教育研究學報，第3期：239～262頁
民86年，國立嘉義師院國民教育研究所

數學寫作活動
— 國小數學教學的溝通工具

劉祥通　周立勳
國立嘉義師範學院

摘要

近年來，數學教育的學者發現寫作可以幫助數學的學習，因而建議將數學寫作活動融入數學教學中。寫作究竟在數學教育上具有那些功用？它如何能促進學生對數學知識的了解與學習？國小教師要如何將寫作活動融入數學教學中？為本文所要探討的主要問題。

本文首先討論數學寫作教學的背景，認為在當前數學教育課程強調「溝通」與「主動學習」的精神下，數學寫作必將受到重視；其次從數學的解題活動、表徵活動、建構知識活動與產生省思活動，來闡述數學寫作的理論基礎；最後據以提出八項數學寫作活動的內涵，以作為教師將寫作融入數學教學活動的參考。

壹、前言

近年來，美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics)(NCTM, 1989)出版的「數學課程與評鑑標準」(Curriculum and Evaluation Standards for Schools Mathematics)一書推薦，將數學寫作活動融入數學教學中。該書認為數學教學應強調有意義的溝通，數學觀念的寫作可幫助學生釐清他們的想法，與加深他們既有的觀念。關於寫作，一般教育工作者直覺的反應是語文科的活動，何以能行之於數學的活動裡？事實上，人類一直用寫作的活動來學習數學，例如，數學家以寫作讓世人了解其想法，經由論文、與期刊的發表呈現予其同道共享；數學教學者為了學生的學習與自己的教學，也必需透過課堂的筆記、教案的編寫、與教科書的編撰來達

成。由此可知，寫作的確在數學的傳播上佔有相當重要的地位(Azzolino, 1990)。

寫作有助於學生多方面的學習數學，學者認為學生在數學寫作之前，必須對數學的知識進行相當程度的思考，並加以組織，方能將已學過的觀念結晶化。而數學寫作的作品一旦完成，不但對他自己日後的數學學習，也對數學概念有困難的同學，具有參考與學習的價值(Johnson, 1983)。由於整個寫作的過程提供學生以「寫」來表達想法的實際經驗，這樣的經驗培養學生將內在的數學想法表達出來，如此，數學溝通的目的便容易達成。另方面，Miller(1992)指出寫作是主動的學習過程，他能促進學生程序性與觀念性的了解；學生也往往在寫作的時候才發現自己在想什麼？學到了什麼？什麼是重要的？寫作也有助於學生組織與整理數學概念，並且在一些觀念中尋找關連，尤其是聯結直覺的想法、數學語言、與抽象符號。據此，筆者認為凡是促使學習者解釋、省思、回顧、組織、或連結數學的書寫與紀錄活動，均可謂之「數學寫作活動」。此種活動在幫助學生學習數學上，可扮演重要的角色。

雖然理論上，寫作活動對數學教學與學習有其重要性與功能，而學者倡導將寫作活動融入數學教學中已有一段時日(Johnson, 1983;Borasi & Barbara, 1989; Azzolino, 1990; Miller, 1991; Wilde, 1991; Burks, 1994)，但是數學寫作是在怎樣的背景下受到重視的？為什麼寫作活動可以幫助數學的教學與學習？以及數學寫作的活動如何作為數學教學與學習有用的工具？為釐清這些問題，本文將分成「數學寫作的背景」，「數學寫作的理論基礎」與「數學寫作活動的內涵」三方面來探討。

貳、數學寫作的背景

近年 NCTM(1989)強調，學童在與外在環境及他人互動的過程中是一個很主動的個體，能建造、修改、與整合已有的知識，因而，數學的學習必須是主動的過程。探索(explore)、驗證(validate)、表徵(represent)、解決(solve)、建造(construct)、討論(discuss)、使用(use)，調查(investigate)、描述(describe)、發展(develop)與預測(predict)等「動詞」都是可以促進內在心智與外在世界的互動(p. 20)。至於互動的結果則有賴「溝通」以達成文化傳播的目的。「數學視為溝通」(mathematics as communication)在「數學課程與評鑑標準」一書被列為五項重要的改革指標之一(NCTM, 1989)，也因此聽(listening)、說(discussing)、讀(reading)、與寫(writing)自然的就成為很重要的數學溝通的方式。

將數學視為一種語言，它包含一般語言(ordinary language)、術語(technical vocabulary)、定義(definitions)、符號(symbols)、模型(models)、流程圖(charts)、圖表(graph)、圖形(diagrams)、規則(rules)與程序(procedures)。這種語言可以是「熟悉」與「不熟悉」的混合體，以此種語言溝通需要對數學語言有深入的了解(Lappan & Schram, 1989)，而數學寫作正好能提供老師掌握學生對數學語言的了解程度。為了反映「數學課程與評鑑標準」的精神，數學課程的內容與教學實踐(instructional practices)也隨之調整，其中在教學實踐上特別強調「數學的寫作」(writing about mathematics)，而不再重視過去所強調的「書寫練習」(writen practice)、「使用習作簿」(use of worksheets)、或「紙筆操作的靜態工作」(paper-and-pencil manipulative still work)，這樣的轉變其實就是從過去的「反覆練習」改變為強調「溝通與統合」的訓練。

根據NCTM的觀點，數學評量的目的有四點：監控學生的學習進展以促進學生的成長，做出教學的決定以改進教學品質，評估學生的學習成就以確認學習的達成，評估課程的依據使課程更完善(NCTM, 1995)。最近我國部編新課程在教材組織設計上的依據，採用心理組織(而非邏輯組織)，其用意即是從學生觀點探討「學習是否有發生？」，「學習到底有沒有意義？」，學生學習的進展不佳，老師該以何種方式的佈題以促進學生的成長？學生學習效果不佳，或者學生是否只會「程序性的知識」(procedure knowledge)而不了解「概念性的知識」(conceptual knowledge)，老師該如何改進教學？學習目標是否達成？或者教材應否重新修訂？在傳統的數學評量所獲得的訊息，無法滿足新課程改革的需要下，以數學寫作作為一種評量方式是不是可以幫助此四種評量目的達成呢？相信是未來數學教學與評量應嘗試的途徑。

參、數學寫作的理論基礎

數學的活動大致可包括解題的活動、表徵的活動、建構知識的活動、與產生省思與分析的活動，而數學寫作的活動也由這些活動組成。因此，本文將就這些活動來闡釋寫作與學習數學的關係，以作為數學寫作的理論根據。

一、寫作的歷程與解題的歷程相符應

Hayes & Flower (1980)曾根據放聲思考原案(thinking aloud protocol) 分析得到寫作有三種歷程：計劃(planning)、轉譯(translating)、和回顧(reviewing)。

計劃:是指從現有的資料與長期記憶裏尋找訊息,並利用這些訊息以構造出正文(text)的藍圖。

轉譯：是指將寫作藍圖變成寫作正文的歷程。

回顧：是指使用「閱讀」與「編輯」的次歷程，把寫出來的正文加以改進。

什麼是解題(problem solving)？依照完形心理學家的看法，解題的過程是一種搜尋，嘗試將一個問題的各種線索組織在一起，它的結果在達成結構性的了解(structural understanding)， 這樣的過程需要重組(reorganizing)各問題情境的要素於一種新的方式使得解題成功 (Mayer, 1991)。解題又可分成兩部份，第一是探索，探索條件之間可能存在的關係，第二是確認，以答案去確認這些關係(Morris, 1983)。而Polya(1957)在其「如何解題」(How to solve it)一書中探討了關於解題的四個階段，依次是：了解題意、擬訂解題計畫、 執行解題計畫、與回顧。此四個歷程分別 是：

了解題意：了解已知、未知、與待答的問題。

擬訂解題計畫：為解題者探求問題的各層面的關係後所釐定的初步解題策略。

執行解題計畫：為解題者經由解題計畫尋找答案的過程。

驗算或回顧：為解題者檢驗答案合理性與正確性的過程。

雖然汲至目前，甚少數學教師能成功地整合「解題」與「寫作」兩個活動，也很

少教科書將寫作活動放入習作內，多數學生與老師還繼續的將數學與寫作視為兩個不同的領域(Davison & Pearce, 1988)。但是，由以上對寫作與解題的歷程的分析，吾人可以看出：寫作的「計畫」實際上包含了解題時的「了解題意」與「擬訂解題計畫」；寫作的「轉譯」與解題的「執行解題計畫」相對應，而兩者的最後都強調「回顧」的歷程，因此，兩者思考的心理歷程幾乎是相互符應的(correspondence)。因此，有學者呼籲(Johnson, 1983)，數學教師需要體認到寫作活動對數學解題而言，可以作為一個有價值的學習與評量工具。

二、寫作是聯絡不同表徵的活動

溝通技巧在數學的學習上是很重要的， Emig(1977)認為以圖形來表徵言語是第一階(first order)的思考過程的語言，而以寫作來表徵言語則是一種第二階(second order)的思考過程的語言。表徵(representation)的功能，並不限於與他人溝通，也是與自己溝通的工具，寫作即是幫助學生自己聯絡各種不同數學概念的表徵活動，例如，物體的、圖像的、符號的、文字的、與心理的表徵。兒童學習數學時，若能在不同的表徵方式中自由的轉譯，就表示其已能真正了解概念的意義(Lesh, 1979)。

建構主義論者 Vygotsky ，在探討神經系統參與記憶行為之後指出：參與活動的器官越多，接受的印象越深刻，形成的記憶也就越深刻和完整，因此他主張教師在教學的過程中應盡量促使學生的各種器官參與活動，這樣學生的記憶就會更加深刻，所獲得知識也會更全面、更牢靠(張佩真等譯，民 82 年)。 Piaget 也說每個行為或多或少都有意識存在一個行為，或許有意識，但沒有經過整合的這種意識稱之為「初等意識」，以自己為例，當他看手錶時若沒有大聲唸出時間或小聲喃喃自語則馬上忘記時間。在視覺上他看到手錶確實意識到時間，但由於意識沒有經過整合，不看手錶時意識又消失了(劉玉燕譯，民 83 年)。由是可知，認知論者認為個體學習時，參與學習活動器官愈多，對學習效果的增益也愈大。

寫作是涉及多重表徵與整合的活動。因為寫作是將口述的語言變成文字的符號，所以是表徵的；數學寫作的過程涉及了左、右兩個半腦運作，右腦半球的運作是類比的、與直覺的方式，左腦半球的運作是邏輯推理的方式，當右腦半球處理視形符號

(visual symbol)與結構相似型的資訊，左腦半球則處理言辭符號與概念相似型的資訊(陳澤民譯，民76)；從數學思考到數學寫作，左右腦都活絡了，所以寫作具整合左右腦思考的功能(Burks, 1993)。因此，經由寫作活動，更多的感官參與了活動，意識受強化，數學學習應該會更牢靠。

三、寫作是建構知識的活動

Borasi & Barbara (1989)倡導以寫帶動學習(writing to learn)的數學學習法，他們認為這種學習不只是將知識看成事實與觀念的組合(Knoblauch & Brannon, 1983)，也不只是將內心已存有的觀念做簡單的轉譯(transcription)而已(Fulwiler et al., 1982)；而是學習與寫作都看成建造意義的過程，在這個過程中使學習者主動的連結已知的知識與正在學習的知識(Mayher et al., 1983)。就一般寫作而言，胡適曾在「治學的方法與材料」一書中提到：吸收進來的知識思想，無論看書來的，或是聽講來的，都只是模糊零碎，都算不得我們自己的東西。必須做一番手腳，或做提要，或做說明，或做討論，自己重新組織過，申述過，用自己的語言記述過，那樣的知識才算是自己的了(胡適文存，頁172)。

Berry(1983)發現：若要求學生練習數學解題時口述並在練習後加以解釋，這種在行動之後再回頭尋求理由的教學策略，確實能產生良好的學習效果。劉錫麒(民82)提出以口述思考(talking about thinking)的教學策略幫助學生的數學學習，因為就控制性的目的而言，口述思考在促進思考歷程的自我察覺，並使思考歷程得以觀察；就建構性的目的而言，口述思考在促進學習者反省思考，並提供主動建構知識的機會。劉錫麒更進一步強調：解釋可以促進解題歷程的反省思考，因而具有增進解題能力的功能，更重要的是，在解釋的過程中，促使學習者以新的方式統整知識並精緻化知識。

較早Piaget即強調在每個領域，都是「行動在先，理論在後」，「先有技術，後有科學」，概念與學說都是從行動所發現的事實理論化得來的，機械工人往往是沒有自覺的物理學家(劉玉燕，民83譯)。寫作活動是促使學習者解釋、省思、回顧、組織、或連結數學的活動，因此寫作活動如同口述思考，有時候也是在行動之後回頭尋求理由，也是在尋求解釋，因為寫作活動是在行動之後尋找理由，因此具有促進學習

者思考歷程的自我察覺、反省思考、與主動建構知識的功能；正因為寫作活動涉及解釋活動，所以知識的統整與精緻化也往往在寫作的過程中完成。學習者以新的方式統整知識並精緻化知識時，其實就是將資訊再加工處理，就是在從事建構知識的工作。

四、寫作促成後設認知(metacognitive)能力的發展

寫作是自我控制速度與回顧的活動；寫作鼓勵學生藉著重新閱讀(rereading)與重新檢驗(reexamining)已有的數學概念以重整(reprocess)他們的想法(Bell & Bell, 1985)。Bell & Bell (1985) 強調閱讀(reading)只是解讀(decoding)語言的線索(language cue)、口述(speaking)只是隨興(transitory)而不能回顧(reviewing)的、而寫作卻是編碼(encoding)的活動，它提供情境(contexts)使學習與思考得以發生。

後設認知的技能對數學解題是很重要的，Peterson(1988)強調學生的後設認知能力顯然與他們的學校學習有密切的關係，但是許多學生往往未察覺他們自己的學習與記憶的過程，以致忽視他們已知那些與未知那些。Garofalo(1986)亦強調：老師應藉著自己控制決定與行動的機會展現給學生觀摩，以幫助學生發展控制與調整的能力。同時 Shoenfeld(1987)認為老師應讓自己心理內在的計畫、監控、與評估解答的過程透明化，使學生了解其中的奧祕。因此老師提供的數學問題或作業，如能使學生產生省思、分析、或陳述的活動，將有助於後設認知(Metacognitive)能力的發展(Garofalo, 1987)。而寫作活動就是製造機會讓學生產生省思、分析、或陳述的活動。

肆、數學寫作活動的內涵

NCTM(1991)出版的 Professional Standards for School Mathematics 一書中強調四項數學老師應努力的方向，1、訂定目標且創造良好的數學作業以幫助學生達成此目標；2、經營班級的討論會(discourse)，使得師生都清楚學到了什麼？3、營造教學情境，以幫助數學的教學與學習；4、分析學生的學習情況、數學問題與教學情

境，使得教學時能在臨場做出適切的決定。根據此四個方向與前述的理論基礎，以及數學寫作活動是促使學習者解釋、省思、回顧、組織、或連結數學的活動的觀點，依前述的理論基礎，本文認為教學上數學寫作活動應具以下之內涵。

一、珍視學生粗糙或自然的想法以增進學生對數學的信心

在數學解題中，學生的想法往往出乎老師的期待，這時老師應珍惜這樣的想法，並應深入探討學生的想法。例如：

1、**教室裡有個 4 男生，3 個女生，教室裡有幾個學生(適用於一年級)？**有個學生的解法是 4 ＋ 3 ＝ 10 － 3 ＝ 7 。

2、**院子裡有 5 隻花貓，再來了 2 隻白貓，又走了隻 4 貓，現在院子裡有幾隻貓(適用於一年級)？**有個學生的解法是 5 ＋ 2 － 4 ＝ 5 － 2 ＝ 3 。

他們的答案都對了，但是解法怎麼來的？用湊的嗎？該不該給分呢？讓我們看看另一位學童的解法吧！有位學童解 6 ＋ 7 ＝？的題目時，以如下的策略 6 － 5 ＝ 1 ； 7 － 5 ＝ 2 ； 5 ＋ 5 ＝ 10 ； 10 ＋ 2 ＋ 1 ＝ 13 。老師若能仔細分析或追問學童的解法，將不難發現：「以 5 為經驗中心， 6 與 7 分別比 5 多 1 與 2 ，每隻手有 5 根手指頭，兩隻手共有 10 根手指頭，然後再加上 2 與 1 」是此學童的解題策略。老師有了這樣的經驗之後，對於例 1 的「 4 ＋ 3 ＝ 10 － 3 ＝ 7 」的解法，就不會有困惑了！就可以詮釋成「 4 ＝ 5 － 1 ； 3 ＝ 5 － 2 ； 4 ＋ 3 ＝ 5 ＋ 5 － 1 － 2 ＝ 10 － 3 ＝ 7 」了！

在例題 2 中，學童的「 5 － 2 」是怎麼來的？是有了「 2 － 4 ＝－ 2 」的雛型概念了嗎？經追問與反覆推敲，結果是「要減 4 ，從 2 減還不夠減，再從 5 減 2 ，於是留下了 5 － 2 的過程。

在學生經驗不足的情況下進行算則或符號的教學，往往會導致對算則或符號的意義的不了解，因此，解題記錄的發展需要循序漸進，由具體然後逐步抽象化。例如、**一輛汽車有 4 個輪子， 5 輛汽車有幾個輪子？**(楊美伶，民 83)。學生可能的記錄活動有下列方式，但是活動記錄一、與活動記錄二是較粗糙的自然想法，教師應予珍視，如此才能帶給學生信心。

活動記錄一、	活動記錄二、	活動記錄三、	活動記錄四、
○○○○	4	4	$4 \times 1 = 4$
○○○○	4　8	4+4=8	$4 \times 2 = 8$
○○○○	4　12	8+4=12	$4 \times 3 = 12$
○○○○	4　16	12+4=16	$4 \times 4 = 16$
○○○○	4　20	16+4=20	$4 \times 5 = 20$

85 年版的新課程修訂中強調有意義的學習與個別差異的問題，在兒童還沒有發展到足以運用符號來表徵解題想法時，老師應准予學生使用自己的「自然想法」以記錄解題活動，如此對學習者而言才是有意義的。甯自強(民, 82)指出由具體活動、表徵活動、與抽象運思活動是兒童建構數學概念的演化途徑。甯自強更進一步強調「落實以學童為本位的教學」是新課程的基本精神之一，而某些學童因資質較差，解題時難免以較粗造的策略呈現出來，這時老師不應強迫其接受較有效率的方法，相反的，應該尊重學生的自然想法，如此學童對數學的信心與興趣才不致於減損。至於其他學童較有效率或較抽象的解題想法，老師只要讓其知道，並不強求此資質較差的學生一定要會。

二、讓學生用自己的話推敲數學觀念以回饋教師的教學

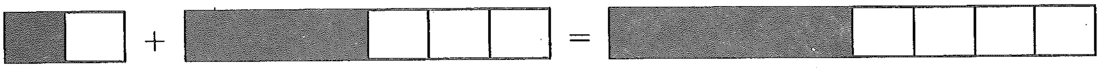
Vygotsky 在論述「記憶」時指出：老師的任務就是跟學生的舊記憶打交道(引自張佩真等譯，民 82 年)。這段話裡其實就是強調「老師的任務是應該深入了解學生的舊經驗」，學生的舊經驗透過寫作回饋給老師，老師更能掌握學生的知識與想法，教學將會更有效果或效率的。例如：

1. 請以簡短的句子說明下列式子對或不對：$\frac{1}{2}+\frac{3}{6}=\frac{4}{8}$ **(適用於四、年級)**

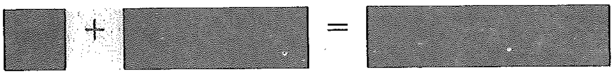
2. 請以你自己的話說明 $\frac{3}{100}$ **的意義(適用於四、五年級)。**

以第 1 例來說，有的學生回答說是「錯的」，因為 2 分之 1 加 2 分之 1 超過 2 分之 1 的。有的學生的回答是「對的」，理由是： 2 打場球，贏了 1 場，又打了 6 場球，

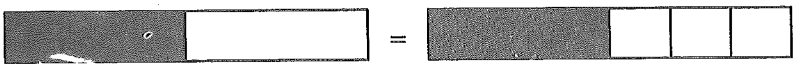
贏了 3 場，總共打 8 場球，贏了 4 場球。學生以球賽經驗來詮釋，並以寫作方式表達想法，使得老師有機會發現：他的解題的基模(schema)是採用下圖「分數相加時，分子加分子，分母加分母」的算法。



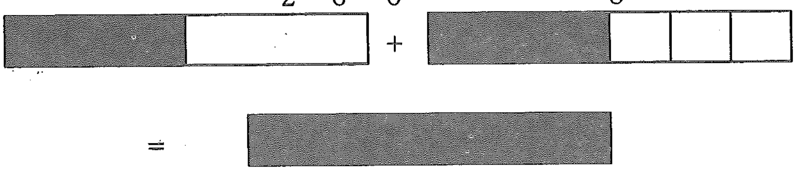
其實 $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\neq\frac{4}{8}$ 是有很多的理由可以解釋的，但是重要的關鍵在於作整數的加法時，通通可以加在一起，例如， $1+3 = 4$ 。



除此之外，老師應該探究學生對等值分數的瞭解($\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$)



如此才能使學生明瞭 $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$，不是等於 $\frac{4}{8}$ 。



以第 2 例來說，有位學生在還沒有學過分數除法之前，竟然說出可以把分子 3 當作被除數，把 100 當作除數，那商就是 0.03 。這位學生還這樣寫著：分數裡隱藏著一個除法在裡面，他可以「除」也可以「不除」，這可是「第二代除法」！(鄔瑞香，民83)。數學知識的基礎是符號的使用，而數學符號的使用是相當獨特的，數學符號不僅用來代表概念也用來表徵歷程，正如 $\frac{3}{100}$ 是分數的概念，同時也代表「除」的過程，這種同時表示過程和概念的符號，充斥著整個數學領域，這也說明了數學符號的「多義性」。研究發現以彈性態度來解釋符號的多義性質，反而變成一個擅長數學思考者

的特徵（劉錫麒，民 83)。前述這位學生就是以把分數看成「過程」和「概念」的符號，他所謂的「除」就是把分數看成「過程」，「不除」就是把分數看成「概念」，這位學生能已分數符號的多義性的觀點呈現出來了，是不是流露出擅長數學思考者的特徵呢？

三、要求學生說明自己的解題策略以了解其迷失概念

寫作不只是額外的習作，更是教學過程的整合。學生可將課堂上學到的心得，解題所用到的策略，與本單元相關的題材表現於作業簿上；學生若是無法了解課堂所學，則可寫下困惑之所在；若是無法成功地解答習作上的題目，則寫下他們所嘗試過的解題計畫也無妨；甚至教師可以讓學生在考卷上說明“答錯”的原因與重新思考自己的“迷思概念(misconceptions)”(Burks, 1993)。職是，學生的溝通技能乃得以練習，各數學題材之間的相關性可以被察覺，學生的迷失概念或另有想法(alternative thinking)得以被發現，因此，對教師而言，寫作也可作為一種很重要的評量與診斷工具。

例如，**某校一年級有 2 班，甲班有 30 人，數學測驗平均分數是 80 分，乙班有 20 人，數學測驗平均分數是 90 分，請問該校一年級的數學測驗總平均是多少？**

（1）、明你的解題策略；

（2）、並說明此數學測驗總平均可否用(80+90)÷ 2 ＝ 85 ？

此一例題不是要學生只列出解題程序，(80 × 30 ＋ 90 × 20)÷(30+20)＝ 84 ，更要說明解題策略；學生的解題思路，經由此寫作活動而更加透明化，習得的解題策略也因此得到加強與鞏固。此題的班級人數不一樣，不能直接用(80+90)÷ 2 ＝ 85 求總平均，特別要學生說明的目的是在偵測一般學生的總平均數或加權平均數的觀念，有不少學生不了解總平均數是由總分數除以總人數求得，或不知道「加權」的意義。學生的迷思概念，經由老師的批閱，或許可以得到訂正或補救。

四、 讓學生自創解題程序與計算算則或以發展關係性的概念

根據皮亞傑的理論，數理邏輯知識(logico-mathematical knowledge)非存在於外在實體，而是由個人內心所創的「關係」所組成，一般人錯以為此知識必須由他人

傳授灌輸(如同社會知識)或由外在實物內化(如同物理知識)，忽略了數理知識可由兒童與環境互動中創造而得(周淑惠，民 84)。基於這樣的理念， Kamii & other(1993) 提倡一種教學策略，避開算則(algorism)的教學，鼓勵兒童創造自己的解題程序或計算算則。 Kamii 等的實驗發現：兒童以自創的算則學習後，他們對位值(place value)概念有更深刻的認識，也發展出較好的數概念(number sense)。例如，

(一) 53 － 24 ＝ ?(適用於二年級)

兩個創造性的解題程序如下(Madell, 1985)：

1 、 50 － 20 ＝ 30	2 、 50 － 20 ＝ 30
30 － 4 ＝ 26	4 － 3 ＝ 1
26 ＋ 3 ＝ 29	30 － 1 ＝ 29

(二) 117 ÷ 9 = ?(適用於三年級)

有位學生自創的計算算則如下：

```
       4
       9
9    117
      81
      36
      36
       0
```

答： 4+9=13

以第二例來說，這位台北市東園國小鄔瑞香老師的學生，以「 117 個東西分給 9 人，每人至少可得 9 個，剩下的 36 個，每人還可再分到 4 個 」來詮釋他的算則。如此的算則是出自於學生的自然想法，確是對學生很有意義的。

(三)35 ＋ 27 ＝ ?(適用於一、二年級)

30 ＋ 20 ＝ 50

5 ＋ 7 ＝ 12

50 ＋ 12 ＝ 62

以第三例的來說，學生想到 35 時是“30 與 5”而不是“5 與 30”，學生想到 27 時是“20 與 7”而不是“7 與 20”，而課本教的直式算則是先計算 5+7 ，然後再計算 30+20“，如此便與他們的自然想法相違背(Kamii, 1990)，若是老師允許學生自創算則或解題程序，如例三先處理 30 ＋ 20 ，在處理 5 ＋ 7 ，如此的學習與學生的經驗相吻合，學習數學將會較有意義，而不至於流於記憶算則而已。

五、設計開放式(open-ended question)的問題供學生組織答案

國內班級人數眾多，學生的數學能力參差不齊，教材的難度不易拿捏，老師如何能佈良好的題目(well-posed question)以迎合所有的學生同時學習，達成混合能力(mixed ability)的教學，實在是很重要的課題， Sullivan & Clarke (1991)整理出這樣的問題有以下的特徵：

1 、個人或團體以很少的協助就可以解題。

2 、問題可以被延伸、且完成問題之學生應被要求有更周延的答案。

3 、答案並不唯一、解題的路徑也不唯一、且一個答案也是可能。

當然有些問題未必所有的特徵都能滿足，有些問題甚至在教科書裡就垂手可得，儘管如此，教師仍應謹慎的省思教學的問題或教學材料是否符合這些特徵或標準，使教學問題得以發展與延伸，以迎合更多的學生學習，而這類的教學問題簡單的說就是開放式的問題(劉祥通，民 83)。 Sullivan & Clarke (1991)舉出以下的例子：

1 、請描述四捨五入後會得到 5.8 的所有數(適用於五年級)。

多數學生都能輕易地找出一兩個 5.78 或 5.84 的答案，於是老師可以在要求其他可能的答案；俟有了回應後，老師又可追問「**最大的數是什麼？**」與「**最小的數是什麼？**」，接著老師還可追問「**所有可能的答案的範圍是什麼？**」，如此一來，學生就可經驗到「一般解」的意義了。

2 、請找出 5.1 與 5.2 之間的 15 個數(適用於五年級)。

大半的學生會回答 5.11 ， 5.12 ，，， 5.19 等的答案，然後就以為沒有其他的答案了，接下來老師可以追問「**5.1 與 5.11 之間是否有其他的數？**」或「**5.11 與 5.12**」**之間是否有其他的數？**”，甚至問「**5.10 是否大於 5.11**」與「**5.20 是否大於 5.2**」，使學生察覺到「百分位數」的存在？設計問題使學生無法完全地回答，是老師在佈此類題目的重要目的，期使資質低的學生可以回答部份的答案，資質中上的學生可已經由解題再次經驗到「十分位」、與「百分位」的意義，及其與數線(number line)的對應關係。此外，老師可設計條件不充份的問題，讓學生猜測並討論可能的答案與理由，以瞭解學生習得的數學概念，例如(楊壬孝，民 82)：

3 、小英拿他零用錢的 $\frac{1}{4}$ ，建國拿他零用前的 $\frac{1}{2}$ 一起去買糖果。請問小英買糖果的錢 可不可能比建國買糖果的錢還要多？請說明理由(適用於六年級)。

就本題分數真正的意義，在於分數代表某一基準量的部份，基準量不等，其部份也不能比較。此例中若有學生直接回答不可能，因為 $\frac{1}{4}$ 比 $\frac{1}{2}$ 小；另有學生的答案是「不一定」， 因為我們並不清楚小英與建國的零用錢總數，所以無法比較。教師面對學生不同的答案與想法，便可以從中瞭解學生習得「分數概念」的意義為何。前者，顯然尚未能真正掌握分數的意義，相較之下，後者似乎較能體會分數「基準量」的意義。特別是，針對學生不同的回饋，老師可再調整或延伸教學活動，例如，讓學生進一步討論**在何種條件下，小英買糖果的錢會比建國的多**？

六、讓學生利用表徵圖以幫助解題

根據 Polya(1957)的見解，學生依照解題的四個步驟練習數學解題，多數學生的解題能力可以獲得增進。 Heller & Hungate (1985) 發現：許多數學老師在教數學解題時，經常讀完了題目之後，就將答案寫在黑板上，省下了分析策略的過程，也忽略了解題後的檢驗與回顧的功夫，其實對數學解題者而言，策略過程的透明化與答案合理化的驗證是有必要的與重要的。

Polya 的四個解題步驟中的第二個步驟-擬定解題計畫，其實就是探求問題的各層

面的關係後所釐定的解題策略，設計有用的表徵圖是一種很常用的解題策略，好的表徵圖的確可以幫助解題者解題。當學生在解題的過程中，他們的工作記憶區很容易超載，外在的表徵圖可以減輕這個負荷。基於這樣的理由，有些牽涉好幾個需被操作的觀念或條件的題目，就更需要利用外在的表徵以幫助解題。例如：

甲車以每小時 45 公里的速度行駛，乙車以每小時 60 公里的速度行駛，已知甲車已在乙車前方 90 公里，如果乙車想要追上甲車需要花多久的時間(適用於六年級)？

如 Heller & Hungate (1985)所述，許多數學老師在教數學解題時，念完了題目之後，就將答案 $90 \div (60 - 45) = 6$ ，寫在黑板上，未利用外在表徵以幫助解題，忽略策略過程的透明化與答案合理化的重要性。本題若是要求學生列出 Polya 的四個解題步驟，可能會有以下的結果出現(Liu, 1993)：

1 、了解題意

乙車在甲車後方，但是乙車速度較快，因此，乙車會漸漸逼近甲車，本題是求乙車追上甲車需要的時間。

2 、制定解題計畫

時間	0	1	2	3	4	5	6
甲車位置	90	135	180	225	270	315	360
乙車位置	0	60	120	180	240	300	360
兩車距離	90	75	60	45	30	15	0
縮小距離	0	15	15	15	15	15	15

3 、執行解題計畫

甲車每小時 45 公里

乙車每小時 60 公里

乙車以每小時 60-45=15 公里的速度靠近甲車

甲乙兩車原來相距 90 公里

所需時間為 90 ÷ 15=6(小時)

4 、回顧或驗算

$90 + 45 \times 6 = 360$

$60 \times 6 = 360$

七、要求學生練習擬題以加深對問題結構的了解

美國數學教師學會出版的「教數學的專業標準」一書中強調，教師應能判斷何時與如何讓學生向艱難挑戰，與如何佈題以激發學生思考(NCTM, 1991). 問題結構的了解是能否成功解題的重要關鍵。老師應多佈題讓學生「經驗」問題的結構，例如：

一架鋼琴 10 萬元， 200 萬元可以買幾架鋼琴(適用於四年級)？

此問題可求要學生寫一個更少數字，而維持相同結構的問題。那麼學生的作業可能出現如下的問題：

一張貼紙 10 元， 200 元可買幾張貼紙？

學生將問題的數字簡化了，老師就看出學生已經了解原問題的結構，且已將「萬」這個單位可以當作「物件」一般的操作，也就是看成一個「數學物件(mathematical object)」了。

同樣的，老師也可要求學生將問題結構更簡單化或更複雜化，將數字變成更小或更大、將解題需要的步驟變為更少或更多。

用長 36 公分的竹籤作正三角形的一邊，則此正三角形的周長是幾公分(梁淑坤，民 83)**(適用於四年級)**？

學生將此題目改成下列的題目：

1 、用鐵絲圍成邊長為 36 公分的正六角形，則此圖形的周長是幾公分？

2 、用邊長 36 公分的鐵絲圍成像骰子形狀，則此圖形的周長是幾公分？

3、用鐵絲圍成周長為 108 公分的正三角形，則此圖形其一邊的長度是多少？

從第 1 個作品中，可以看出此學生已了解本例題的問題結構(周長為邊長乘以邊數)；從第 2 個作品中的擬題與解答可以看出，此學生雖然不知道正立方體的名稱卻能以骰子形狀稱之，且老師可以發現此學生也了解了正立方體的邊數；從第 3 個作品中，老師可以發現學生會以相反的結構做成問題，演算的規則也會改變(乘法變成了除法)。

八、完成調查(investigation)、實測(measurement)、或造形(configuration construction)等具體活動後讓學生寫下他們的心得或省思。

甯自強(民 82 年)指出從「具體物轉向具體活動」是數學科新課程的改革動向之一大特色，過去舊教材強調具體物的操作，而今新課程則強調具體活動。這裡所謂的具體活動，筆者以第二冊的位置標示活動與綑綁活動為例，說明此等具體活動的意義與目的。

位置標示活動：在成線形排列的物件裡，用正整數詞來描述某特定物件在群體中的位置。例如，**穿黃衣服的人是第 20 個，請問在他後面穿紅衣服的人是第幾個(適用於一 年級)？**

綑綁活動：將每 10 個散物件綑綁成一體，以形成代表「十」單位的具體物，例如**將每 78 枝吸管綑綁成 7 捆又 8 枝吸管(適用於一年級)。**

新課程的教學目標是希望透過此位置標示活動，以促進累進性合成運思1的發展；透過捆綁活動以促進部份全體運思(part-whole)2的發展。當學生完成上述具體活動時，若能以寫作活動促使學生反思此等具體活動的意義，相信學習的效果會更加顯著，老師也可以經由學生的作品了解學生的學習情況。

---

[1] 累進性合成運思：對正整數詞的理解不止可將其視爲「數個 1」的合成活動亦可將其視唯一個整體。因此在處理加法或減法時會分別使用「往上數的策略」或「往下數的策略」

[2] 部份全體運思：可以將 78 看成 7 個「 10 」和 8 個「 1 」，亦即可以區辨集聚(高階)單位「 10 」與低階單位「 1 」，因此解決數的大小時會使用高階單位的比較策略。

Wielde (1991)建議在學生完成了「手到(hands-on)」的活動後，接著進行寫作的練習會特別的有效。因此，學生完成調查(investigation)、實測(measurement)或造形等具體活動後，老師若要求他們整理與記錄他們進行的活動，可加強解題活動的反省，也可練習使用數學語言，老師也可知道學生的活動是否達成教學的目標。以下分別是調查、實測、與造形活動的例子：

1.請你調查班上45人中，血型A、B、O、與AB型的各有幾人，各種血型佔的百分比是多少？寫下你的計算過程並以圓形圖表示百分比例(適用於六年級)。
2.請分別量量看臉盆、輪胎、水桶等五樣圓形的物體的圓周長與直徑長，並記錄各物體的圓周長、直徑長、及圓周長除以直徑長之比值(適用於六年級)。
3.請學生作一個75度角後，然後寫下進行的方法與步驟(適用於四年級)。

伍、結語

以數學寫作作為學習數學的一種工具，在「數學視為溝通」的新課程背景之下益顯重要。主要的理由是基於寫作的歷程與解題歷程相符應，經由數學寫作有助於增進學生數學解題的能力、聯絡不同表徵以建構數學知識、以及促進學生後設認知能力的發展。為實現數學寫作在數學教學與學習的功能，本文提出八項數學寫作活動的內涵，作為未來國小教師應用寫作於數學教學的溝通與評量之依據。

美國數學教師協會出版的「數學教學專業標準」強調數學老師應該要能根據學生的學習經驗、與自身對數學知識的了解，而佈下有價值的問題(worthwhile mathematical tasks)，以刺激學生的思考與學習(NCTM, 1991)。因此，本文所舉之八項寫作教學活動需分別針對教材與問題的性質而定，任課老師要根據自身的教學經驗判斷寫作融入教學的可能性。

寫作活動的實施可從簡單的題目著手，經過一些時日的練習後才由淺入深，而學生寫作上的標點、拼字、與文法都不可太過強求；相反的，應給予學生鼓勵、讚

賞、與正面的評價，如此學生才樂意的寫作。

數學寫作活動由老師的佈題開始，然後學生在小組裡合作討論，再由各組提出解題策略，小組之間相互觀摩、與發表看法，最後，每位同學回去之後寫出解題後的省思、心得，甚至感覺(情意)。這樣的教學與傳統的數學教學有很大的差異，過去老師解題，學生被動模仿，今天老師佈題，學生主動解題；過去的溝通是單向的，今天的溝通卻是多向的；過去的數學是明確的、嚴密的，今天的數學是開放的、協商的。的確，經由佈題、討論、寫作的教學，學童將從孤立的紙筆練習者，轉為團隊合作者，從靜聽者成為探索者、報導者、與討論者，從膽小的跟隨者，轉變為探索與嘗試冒險者(周淑惠, 民 84)。再者，對於數學教育界一向強調「多做」數學題目，因寫作活動轉而重視「多省思」數學題目。

寫作活動是要讓學生學得更紮實與更豐富的數學知識，也要讓老師更能掌握學生的學習，不是要讓老師添加無謂的負擔，因此，不需讓學生做每一個練習，老師只要挑幾個問題供學生寫作素材。尤其要注意的是，寫作活動應針對各章節教材的特色要求學生練習不一樣的寫作活動，如此，才能使學生獲得最大的幫助。

參考文獻

周淑惠(民 84)。幼兒數學－新論教材教法。台北：心理出版社。

林清山(民 79 譯)。認知心理學－認知取向(譯自 Richard E. Mayer)。台北：遠流出版社。

胡適(民 75)。 治學的方法與材料(胡適作品集 11)。台北：遠流出版事業股份有限公司。

梁淑坤(民 83)。 擬題的研究及其在課程的角色。載於甯自強主編：八十二學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編， 275-294 。

陳澤民(民 76 譯)。 數學學習心理學(The psychology of learning mathematics, Richard R. Skemp 原著)。 臺北：九章出版社。

甯自強(民 82)。國小數學科新課程的精神及改革動向－由建構主義的觀點來看。科學教育學刊, 1(1),101-108

楊壬孝(民 77)。國中小學生分數概念的發展。國科會專題研究成果報告(NSC77-0111-S003-09A)。

楊美伶(民 83)。 低年級數學科新課程教材改革之探討－數與計算部份。載於甯自強主編：八十二學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編， 151-162 。

鄔瑞香(民 83)。 我的數學教學模式－探索、反省、與成果。載於甯自強主編：八十二學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編， 295-327 。

劉玉燕(民 83 譯)。 皮亞傑訪談錄 (Jean-Claude Bringuierm 原作)。臺北：書泉出版社。

劉祥通(民 83)。 寫作活動在數學教學中的角色。教師之友， 35(5), 32-36 。

劉祥通(民 85)。 數學寫作教學策略初探。載於甯自強主編：國立嘉義師範學院八十四學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編， 247-257 。

劉錫麒(民 82)。 合作反省思考的數學解題教學模式及其實徵研究。國立臺灣師範大學教育研究所博士論文。

劉錫麒(民 83)。 從國小新數學課程標準的基本理念談討論活動的重要。國教園地:， 50 ， 4-7 。

Azzolino, A. (1990). Write as a tool for teaching mathematics: The silence revolution. In T. J. Cooney & C. R. Hirsch , Teaching mathematics in the 1990s(pp.92-100). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Berry, D.C. (1983). Metacognitive experience and transfer of logical reasoning. Quarterly Journal of Experimental Psychology, 35A, 39-49.

Burks, L.C. (1994). The use of writing as a means of teaching eight-grade students to use executive processes and heuristic strategies to solve. Dissertation of the University of Michigan. Order Number 9409614.

Davison, D.& Pierce, D. (1988). Writing activities in junior high mathematics texts. School Science and Mathematics, 88(6), 493-499.

Emig, J. (1977). Writing as a model of learning. College composition and Communication, 28, p. 122-128.

Garofalo, J. (1986). Metacognition knowledge and metacognitive process: Important influences on mathematical performance. Research and Teaching in Developmental Education. 2(2), 34-39.

Garofalo, J. (1987). Metacognition and school mathematics. Arithmetic Teacher, 34(9), 22-23.

Hayes, J. R. & Flower, L. S. (1980). Identifying the organization of writing processes. In L. W. Gregg & E. R. Steinberg (Eds.), Cognitive process in writing. Hillsdale, N.J.

Heller, J. I., & Hungate, H. N. (1985). Implications for mathematics instruction of research on scientific problem solving. In E. A. Silver(Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspective (pp. 83-112). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Johnson, M. (1983). Writing in mathematics classes: A valuable tool for learning. Mathematics Teacher, 76, 117-119.

Kamii, C. (1990). Constructivism and beginning arithmetic (k-2). In T. J. Cooney & C. R. Hirsch , Teaching mathematics in the 1990s(pp.92-100). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kamii, C.,Lewis, B.A., & Livington, S. T.(1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures. Arithmetic Teacher, December 1993, 200-203.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: Considerations for identification, diagnosis, and remediation. In R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M.G. Kantowski (Eds.). Applies mathematical problem solving. Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Liu, S.T. (1993). Effects of teaching calculator use and problem solving strategies on mathematics performance and attitude of fifth grade Taiwanese male and female students. unpublished dissertation of The University of Memphis.

Madell, R. (1985). Children'snature process. Arithmetic Teacher, 32(March 1985), 20-22.

Mayer, R. E. (1991). Thinking, Problem solving, cognition (2nd edition). New York: Freeman.

Miller, L.D. (1991). Writing to learn mathematics. Mathematics Teacher, October 1991, 516-521.

Morris, J.(1983). How to develop problem solving using a calculator. Reston, VA: National Council of Teacher Mathematics. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 202 698).

Nahrgang, C. L. & Petersen, B.T. (1986). Using writing to learning mathematics. Mathematics Teacher, 79(1), 461-465.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). Professional standards for teaching mathematics. Reston, VA: Author.

Peterson, P.L. (1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning. Educational Researcher, 17(5), 5-14.

Polya, J. (1957). How to solve it (2nd ed.). Garden City, NY: Doubleday Books.

Resnick, L. & Ford, W. (1981). The psychology of mathematics for instruction. Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition ? In A. H. Schoenfeld(Ed.). Cognitive science and mathematics education (pp. 189-216), Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Sullivan & Clarke(1991). Catering all abilities through "good question." Arithmetic Teacher, 39(2), p. 14-18.

Wilde, S. (1991). Learning to write abut mathematics. Arithmetic Teacher, 38(February 1991), 38-42.

Mathematics Writing Activities — A Communication Tool of Instruction for The Elementary Mathematics

Shiang-tung Liu, Li-shun Chou
National Chiayi Teachers College

ABSTRACT

During recent years, the mathematics educators have discovered mathematics writing can help mathematics learning, so they suggested that integrating mathematics writing into mathematics instruction. What are the functions of mathematics writing ? How can it help students' understanding and learning of math ? How can elementary teachers use it in the mathematics class ? These ideas will be discussed in this study.

First, this study attempt to explore the background of mathematics writing. While communication and active learning are very important themes in the curriculum domain of mathematics education, mathematics writing is gaining more attention under this environment. Next, the rationale of mathematics writing will be explored from the prospects of problem solving activities, representational activities, construction knowledge, and generate reflection activities. Finally, 8 kinds of mathematics writing activities were proposed for teachers to teach elementary mathematics.