國 民 教 育 研 究 學 報 ， 第 19 期 ： 79－107
2007 國立嘉義大學國民教育研究所　教育行政與政策發展研究所

學童「圖卡覆蓋」代數推理歷程之研究－以三個個案為例

陳 嘉 皇

崑山科技大學師資培育中心助理教授

摘　　要

本研究之目的在於設計合乎解題條件的問題情境，協助學生發展合適的代數推理能力，並分析其在解題情境中表現的代數推理反應，提供教師辨識與感知推理證據的例證，提升教師推理教學的能力。本研究採個案研究方式，樣本取自南部一所公立小學三名五年級學童，利用研究者設計之「圖卡覆蓋」情境問題，配合訪談，進行作業資料的蒐集。資料採質性分析，分別以探索、分析、歸納及驗證等階段之表現加以探討，呈現出學生推理歷程策略之概念轉化之證據說明，研究者並根據個案在推理過程中之實際表現情形，提出建議，做為教師日後執行教學實務與方法改變的參考。

關鍵詞：代數推理、圖卡覆蓋

壹、緒論

一、研究動機與背景

大多數的數學教育學者都會同意推理、概念的理解以及解題策略的精進，對數學的學習而言，是非常重要的。Russell（1999）認為，如果學生在學習的過程，能夠利用自己數學推理產出的結果解題的話，那麼他們會持續的參與數學的活動。因此，學生需要積極的練習探究變數之間的關係，並對其推理的過程加以說明，形成推理的習慣，如此才能對新的問題進行獨自的探索。Thompson、Philipp、Thompson 與 Boyd（1994）也同意幫助學生成為有技巧的推理者，導引他們採取建設性的方法進行思考，是非常重要的。但上述能力需要教師在數學教學的歷程裡，採取概念性的導向，才能協助孩童發展理解。此種概念導向的教學，也需要學生在解題的歷程中，藉由每一種量化推理形式的表達，提供對所呈現的數量關係加以說明與解釋。

雖然，數學教育者都談論推理、概念的理解以及解釋是非常重要的，但觀察實務現場學生對數學問題的反應，時常看見其表現出所謂的「點到為止」（hit or miss）、漫不經心、隨意的採取任何方式與策略加以應對；許多學生無法使用量化證據的方法，或概念理解的方式進行推理解題，甚至無法對其解題歷程加以充分的說明，為何在教學情境上會產生這種現象？學生真的缺乏數學推理能力？研究者認為：一方面是教師只重解題結果之對錯，欠缺感知學生表現證據的能力，無法從學生的作業與歷程分析學生是否在進行推理活動，這牽涉到對數學推理歷程能力表現的辨識；另一方面，則是教學時間的限制與方法的影響，教師甚少提供推理的機會與方法讓學生練習，亦即無法布置安排合適的解題情境，讓學生嘗試。鑑此，本研究產生的動機緣於：

（一）設計合乎解題條件的問題情境，協助學生發展合適的代數推理能力。

（二）藉由分析學生在解題情境中表現的代數推理反應，提供教師辨識與感知推理證據的例證，提升教師推理教學的能力。

（三）透過學生解題歷程獲得的發現，執行教室實務與教學方法的改變。

本研究擬先探討相關文獻，建構合宜的代數推理問題設計的準則，利用「圖卡覆蓋」之問題，激發國小五年級的學生從不同結構性圖像的觀察，採取代數推理的樣式進行歸納與表達，並藉由三位個案實作解題及訪談獲取的資料，分析學生代數推理歷程相關能力的反應，提供教師推理教學感知的證據，並作為教學省思與改進的參考。

二、研究目的

基於前述的研究動機，本研究期望達成下列目的：
（一）探討設計與安排合宜的代數推理問題所需的準則，建構合適的代數推理解題情境。
（二）了解學童在圖卡覆蓋的結構問題中使用的代數推理策略，透過分析策略的關係、功能與類型，提供學童解題歷程有關推理能力發展的證據。
（三）激發教師進行省思，改變教學實務，提供未來代數融入國小數學教學的建議與措施。

三、名詞釋義

（一）代數推理

指學生透過情境中變數的觀察、比較、歸類成一樣式或結構，進而將變數的關係轉換成等式、方程式等解決複雜的問題。本研究係指學生透過圖卡覆蓋的觀察，理解白色與黑色圖卡數量之間的關係，進而歸納成等式以解決相同結構問題時，覆蓋所需黑色圖卡數量的問題。

（二）圖卡覆蓋

指學生將正方形圖卡緊密的連結覆蓋在紙本上，圖卡之間不能重疊或有空隙。本研究係指學生利用黑色之正方形圖卡覆蓋在排列的白色圖卡周圍，覆蓋的形式有兩種，一種稱為「序列覆蓋」，一種稱為「矩陣覆蓋」，皆隨著中間白色圖卡的排列方式而產生變化。

貳、代數推理研究之文獻探討

一、代數學習的重要性

代數學習是數學教育的核心，因為它有助於學校數學內容的整合。代數可以教導學生數學有關的定義與技巧：能做說明、類比以及歸納的辨識。代數也提供學生對一些基礎數學步驟的理解：能對數字、圖表以及符號表徵加以詮釋，說明「符號的感覺」，

創造與解釋數學的模式，分析與比較關係，應用基本公式迅速解決問題（呂玉琴，1989；Blanton & Kaput, 2005; Kaput, 1999; Nation of Council of Teachers Mathematics, [NCTM], 1998, 2000; Romberg & Kaput, 1999）。然而長久以來，代數被視為是進入較高階數學的門檻，學生需具備某些基本的能力後才能學習它，因此，在國小階段的數學課堂裡就鮮少被談論。進入廿一世紀後，各國為提升學生基本能力，增強國家競爭力，亟思課程內容的改革與教學方法的精進，期待學生能接受更嚴峻的挑戰，培養更雄厚的潛力。我國教育部（2000）為了，順應世界的潮流，培養國小學童觀察數量關係以及展現數量關係數學結構之能力，在所提出的《九年一貫課程暫行綱要草案》中，將代數主題向下延伸至小學。此措施呼應了 Kaput（1999）的主張，他認為代數的教導與學習應該：（一）在兒童的早期就開始進行，尤其某些部分可以從學生非正式知識加以建構；（二）藉著數學知識的擴展與應用，可將代數的學習與其它學科的學習加以統整；（三）透過數學知識的應用，融入於不同形式的代數思考；（四）建構在學生自然發生的語言及認知的力量上，鼓勵他們在同一時間對其所學進行省思，以及說明他們所明瞭的；（五）鼓勵積極地學習，將其關係結構的利益放在意義與理解上。

另外，NCTM（1989）建議，所有的學生都要學習代數，包含一些低成就或低學習能力者，他們也建議數學的教學應該建立在學生非正式以及先備的知識基礎上。一些研究已經證實了學生可以採用直覺的理解或是非正式教導的代數，包含變數與文字符號的使用、等式解題的方法、運用分配律的能力，以及對等式與群符號（grouping signs）的解釋進行解題（Edwards, 1990）。另外，也有研究探討學生使用算數推理伴隨等式方式解決問題，這些研究說明了學生可以將有力的學習技巧帶入正式的教學中，也告知在代數的推理中可能面臨的困境。雖然對代數的學習已經有非常廣泛的資料，但是教師對於在正式的代數教學前，學生可以學習什麼，尚未有一完整的圖像，因此，無法理解何種非正式的知識，可以創造有效的基礎以建構代數的教學。

傳統上，小學數學學習的重點以算數與計算為核心，很少將重點放在強調簡化算數作業的關係與結構上。研究發現，學生在小學階段學習的經驗，是可以從算數的能力，超越到一種心智習性的陶冶，而支持更複雜的數學教學（陳維民，1998；黃寶彰，2002；莊松潔，2004；陳嘉皇，2006；Blanton & Kaput, 2005; Kaput, 1999; NCTM, 1998, 2000; Romberg & Kaput, 1999）。代數的推理可以同時從小學的數學產生及促進，建構心智的習性，學習日後更抽象的數學。代數的推理，可以從公開的推測與辯論，以及採取正式的方式表達其中的意義，而推論學生參與數學的關係與運作等歸納資料的行為（Kaput, 1998, 1999; Kaput & Blanton, 1999）。代數推理能力帶來的功

能，遠遠超越傳統的觀點，不能將它當成是種語句結構的行為，引導符號的操弄而已。事實上，它能產生在不同的內在關係形式上，包括（一）為表達與形成歸納而利用算數當成一種領域，（二）歸納數字的樣式而描述算式的關係（包括共變數），（三）從計算與關係中抽離出來而進行數學系統的歸納，此領域通常被指涉當成是「抽象代數」（abstract algebra）。因此，有必要將代數融入小學數學課程內，並尋覓有效的學習方法，提升學生數學基礎能力（Usiskin, 1999a, 1999b）。

二、代數學習的內涵與發展

（一）代數學習的內涵

根據 Usiskin（1999a, 1999b）的看法，認為代數是種「語言」（language），這種語言具備五種主要的內涵：未知數、公式、歸納的樣式、位置（placeholder）以及關係，這些都能在小學裡進行教學。Usiskin（1999b）也指出代數的內容具有四種概念，分別為：

1. 可以當成是種已經歸納的算數。
2. 可以當成是種解決某特定問題有關步驟的研究。
3. 可以當成是數量之間關係的研究。
4. 當成數學結構的研究。

代數內蘊的不同概念，皆與不同變數的使用有關，其關係可簡化如下：

表 1

代數的概念與所使用的變數

代數的概念	變數的運用
1. 已經歸納的算數（generalized arithmetic）	樣式的歸納者（傳遞、歸納）Pattern generalizers（translate, generalize）
2.解決特定問題的手段（means to solve certain problems）	未知數、條件限制（解題、簡化）Unknowns, constants（solve, simplify）
3.關係的研究（study of relationships）	辯證、參數（關連、圖表）arguments, parameters（relate, graph）
4.結構的研究（structure）	文章上的任意標記（操弄、調整）Arbitrary marks on paper（manipulate, justify）

註：採自 Conceptions of school algebra and uses of variables, by Usiskin, Z, 1999b, *Algebraic thinking grades K-12*, p7-13. Copyright 1999 by National Council of Teachers of Mathematics.

既然代數是數學教育內涵中重要的題材，具有重要性，所以，在教學上必須有路徑可循，如此才能事半功倍，獲取最佳效果。Kaput（1999）認為這個路徑應包含使用一般正式語言的「歸納」（generalizing）與「表達」（expressing）。「歸納」開始於算數、情境的塑造、幾何內容，以及幾乎能夠或必須出現的數學內涵，以路徑所注入的代數貫穿數學的課程。上表左半部呈現的代數概念，是推理教學的歷程所欲教導學生的能力與目標；右邊部分，是達成此能力與目標，必須呈現給學生的活動或技巧，兩者需相互配合、相輔相成才能達到教學的效能。

為了說明代數如何注入以及豐富數學活動，Kaput 則將代數推理組合成五個不同形式有關的材料模式（如圖 1 所示），反映代數是一種語言的網絡，遍佈於其它所有部分，這具有熱絡交互性的概念以及活動，可以理解代數是能夠進行網絡的連結。這個模式可以發現代數具有以下五種功能：

1. 當成歸納（Generalization）以及樣式與限制的形式化（formalization）。
2. 當成語句結構，引導語意不清的形式主義的操弄。
3. 從計算和關係中做為抽象結構的研究。
4. 做為算數、關係與聯結變數的研究。
5. 做為一種模組的群集與控制現象的語言。

圖 1. 代數推理的五個重疊與緊密關係的形式

註：採自 Teaching and learning a new algebra, by Kaput, J, 1999, *Mathematics classrooms that promote understanding*, p. 133-155. Copyright 1999 by Lawrence Erlbaum Associates.

「歸納」與「形式化」是內在於數學的活動與思考，也是促進數學的物件。「歸納」包含謹慎的擴展推理或溝通的範圍，超越例證或思考的例證，能夠明確的辨認與顯現橫跨各種例證的共通性，或將推理與溝通轉移到將重點不再放在例證或情境本身的層次上，而置於樣式、步驟、結構以及橫跨存在這些物件之間的關係。表達「歸納」意味著提升關係到一些語言內，這是種形式語言，或許對學童而言，也可能是種音調或是姿勢。「歸納」與「形式化」有兩種來源：首先需在數學的性質下進行推理與溝通，這通常開始於算數，接著，從外部數學為主的情境下進行推理與溝通，但這主觀於數學化，通常開始於量化的推理。這兩項來源的差異（數學的性質與外部數學的情境），在兒童時期的學習常出現問題，只有當數學活動採取非常具體的形式，以及常常緊密的聯結到情境，才能引起這些數學活動。

國內學者林光賢、林福來與郭汾派（1989）也深入探討青少年的代數運算概念的發展，發現學生代數概念的層次依次分為：

層次 1：數學特性

（1）數與文字符號或文字符號與文字符號做運算（不含括號）。

（2）去括號不需變號（不需分配律）。

（3）題目結構簡單。

層次 2:數學特性

（1）含二個文字符號的乘法文字題。

（2）去括號需變號。

層次 3:數學特性

（1）含二個文字符號的除法文字題。

（2）分配律去括號。

層次 4:數學特性

（1）三個文字符號的關係式。

（2）文字符號當作變數或文字符號代換。

（3）題目結構複雜，有干擾性。

這些層次的描述，除了說明青少年代數概念發展的歷程外，也提供我們了解他們在不同層次或階段所學重點內容為何，可做為教師教學及代數課程設計應注意之要項。

（二）代數課程與教學設計之準則

代數內涵的選擇影響著學生推理過程中「歸納」與「形式化」的發展。要讓學生獲得良好推理脈絡的路徑，Kaput 的模式，提供了設計代數推理問題的幾項要點。首先，

必需尋找合乎數學理念從中可以發現數字關係並進行歸納的問題，而這需與學童的生活有關，且是常接觸的；其次，可從問題提供的混亂線索中進行計算、操弄，建立變數之間的關係；接著，從變數的關係中歸納合乎問題情境的等式或函數等抽離的結構，最後利用文字或語言進行變數的操控，而獲致現象背後所隱含的意義。

舉例來說，Blanton 與 Kaput（2005）設計「握手問題」的情境，針對導出樣式（type of pattern-eliciting）的作業，配合每天生活的經驗以及思考訓練，讓代數在這些作業裡進行交互作用。他們認為，促進兒童代數的發展，需要遵守以下幾項法則：

法則一，需有能夠提升運用數字與數感的作業，做為代數推理的事物。

法則二，包含計算順序的作業並與學生的算數銜接。

法則三，需要能夠促進行動所允許的作業，以及學生熟悉的狀態。

代數推理的過程具有這樣的信念：即對操作符號與解決前述問題的類型而言，代數不僅是規則的記憶，代數也是推理過程的一部份，是種解題的策略，是思考數學與數學溝通的重點。學生在代數學習上失敗的主要原因，是無法正確的說明數學有關的技術語言。對於內容與教學而言，語言的注意仍需從學生的描述性語言，轉換到數學更技術性的語言上。我們必須要將語言思考成為：強調典型的錯誤概念；討論議題；佈題及組合問題；進行推論、綜合、結論與預測的寫作；以及使用符號當成語言。

對於轉換代數階段相關內容之間的關連，只是受限於在初始的問題情境此範疇下，創造變數的能力而已，Silver 與 Kilpatrick（1987）說明，認為問題的變數必須不斷的增進，當學生解決某問題後，可以改變問題的情境，並重新佈題；其次，可以改變問題中的資料，藉由多元的操作、額外的資訊與不足資料，使得問題更加複雜。除此之外，Kaput 與 Blanton（2005）發現影響學生算數知識的作業，與將現象變成數學包含的一些行動，與每天生活情境下抽離的數學表徵有關。處理這些作業不僅要注意到算數，若要在情境下體現，則需要更複雜的數學思考，所以，需要提供重要的經驗，包括：

1. 辨識以及如何呈現需要的資料（探索）。
2. 使用算數對所接觸的現象所包含的變數加以塑造（探索、分析）。
3. 檢驗現象中的瑣碎繁雜如何影響此模式（分析）。
4. 利用代數推理算數模式中順序的形式（分析、歸納）。
5. 將算數推理深化到支持合宜的運用與操作的選擇，為了提升計算，能夠理解數字之間的關係（歸納）。
6. 使用代數的數字與數詞（歸納、驗證）。

7.理解運作之間的關係（驗證）。

從 Kaput（1999）及 Kaput 與 Blanton（2005）提出的觀點，可以提供數學教育者在代數教學上一些重要啟示，彌補現今代數教學及內容安排上的缺失：

1.代數教學有關的內涵及符號概念，在國小階段可與算數的題材結合，透過歸納、推理尋找變數之間的結構與樣式，而解決問題。
2.代數符號的運用在解題歷程上扮演重要的角色，學生可以利用其解決未知數、等式的問題，但學生符號概念的建立須先理解問題中變數的結構關係，因此呈現的問題需有規則、脈絡可循
3.代數推理能力的發展是循序漸進，可透過策略的協助，以內外表徵方式的運用與操作，抽離出關係的結構，進而運用符號代表未知數。
4.代數推理呈現之問題情境需與學生生活經驗有關，如此才易產生概念的轉化，及運用既有知識基礎進行思考與推論。

上述這些建議，除了可以提供教師作為設計代數學習的內涵與步驟外，在學生代數學習歷程上有關概念與行為的轉換，也可以加以解析與詮釋，幫助我們瞭解孩子是如何透過推理而獲得重要的數學理念。歸納學者提出的法則及遵守的要點，研究者認為要分析學生代數推理的產出，可將其學習的歷程分為探索、分析、歸納與驗證等四階段（相互重疊不能分割，本研究為了資料分析方便而暫時予以區別）的表現，這些連續性歷程，可提供對於代數分析、推測、調整與最後歸納的活動，以及安排或建構資料與分享，描述學生的思考與策略。這些觀點也都是教師專業發展「代數的眼睛與耳朵」所需具備的，而這些代數的機會也能被利用當成產出或包含的部分教學計畫，本研究即透過學生在這些歷程表現的分析，提供實際推理的證據，做為教師訂定或修正教學的依據。

參、研究設計與步驟

一、研究樣本

本研究之個案（小佑、小莛、小雯，皆為匿名）係來自南部地區某公立小學五年級學生，該校處於市中心，家長社經地位皆為中上程度以上，父母親皆具大學以上之學歷背景。在參與此研究之前，個案已具備代數、連結等先備基本能力。代數方面，

能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化心算，熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算，能解決使用未知數符號所列出的單步驟算式題，並嘗試解題及驗算其解。在連結能力方面，學童能選擇使用合適的數學表徵，熟悉解題的各種歷程，運用解題的各種方法，及數學語言呈現解題的過程，會用一般及數學語言說明解題的過程，回應情境、設想特例、估計或不同角度等方式說明或反駁解答的合理性。教師並已教導使用未知數符號，例如運用括弧或是英文字母代表不知的數量，以進行計算；將具體情境中的問題列成兩步驟的算式題，並嘗試解題及驗算其解。

三名個案除具備代數、連結等先備基本能力，在先前面積（長方形）概念的學習歷程中，也已學過方瓦覆蓋的技巧與方法，並透過乘法結構（行×列）的方式運算覆蓋所需數量，但僅限於算數的表達，至於代數推理及符號運用教師並未引導學生深入探索和引出，因此學生需透過實物表徵操弄後，依循問題指示而進行推理與解題。

除上述學習經驗背景之外，個案相關資料如表 2 所述：

表 2

個案之基本資料描述

姓名	性別	年齡	特徵描述
小佑	男	11 歲 4 個月	父母親皆為公務人員，對孩子學習成就要求頗高，管教方式頗為嚴厲。小佑在校學業成就優良，喜愛數學與自然科學,上課喜愛發問,瑞文氏語文測驗 PR 值 98。
小葎	女	11 歲 6 個月	父親為大學教授，母親任教於小學，採民主方式依孩子興趣發展。小葎喜愛音樂與自然科學，善於思考與推理，語文能力佳，曾獲多次作文比賽優勝，瑞文氏語文測驗 PR 值 95。
小雯	女	11 歲 6 個月	父母親皆從商，家境優渥，參與多項才藝學習，喜愛數學，在校成績優異，擔任班級幹部，上課亦喜愛提問，瑞文氏語文測驗 PR 值 99。

二、活動設計

本研究進行的活動，係採用研究者設計之「圖卡覆蓋」作業，此作業分為「序列覆蓋」與「矩陣覆蓋」兩項作業活動，每項作業依序呈現四項問題，問題要求學生在白色的圖卡（本研究稱為命題）周圍覆蓋黑色的圖卡，並計算出所需黑色圖卡所需的

數量。「序列覆蓋」的題目，顧名思義，則是白色圖卡排列的方式採取線狀增加的方式，從簡單的命題數量「1」的覆蓋，逐漸增加難度至命題數量「10」等較複雜之結構性覆蓋的問題。「矩陣覆蓋」的題目，則指白色圖卡排列的方式採取正方形面積增加的方式，從簡單的每邊數量「1」的覆蓋，逐漸增加難度至每邊數量「10」較複雜之結構性的問題。研究者參考文獻建議，為引發學童代數推理能力的發展，並獲取學生推理的路徑，每項作業前三項題目皆提供覆蓋所需之黑、白顏色的圖卡，提供學生從操作、視覺化、算數至歸納的歷程，以發現問題情境中變數之間的關係的，進而能使用代數推理的策略，計算出問題四（純粹文字題，並無提供圖卡或圖式）的答案。

三、研究步驟

本研究於 95 年 4 月期間執行，實施前，首先針對《九年一貫課程綱要》相關能力指標，調查學生代數推理相關基礎能力發展狀況以及班級教學實務情形。接著，根據學生推理能力的發展，設計特殊解題的例證，這些例證皆具有與情境結合之結構性特徵，可幫助學生從觀察中發現變數的關係，進而歸納、塑造出解題的樣式與模式。研究實施過程擬定三個階段進行：

（一）教師佈題提供圖卡，讓學生操弄，發現解題的策略，教師則強調白色圖卡個數與環繞其周圍的黑色圖卡有關。

（二）將測驗題目呈現給學生進行解題作業，此時教師引導學生觀察不同覆蓋之圖卡排列與數字變化的關係，以及如何將瑣碎繁雜的圖形與數字，利用步驟做合理的分析與歸納，進而理解數字運作之間的關係。

（三）學生針對問題四較複雜的題目進行變數分析、推測與歸納的活動，並將解題的步驟利用文字或圖繪的方式加以表達說明，記錄在紙本上。

每名個案「圖卡覆蓋」問題施測時間為 40 分鐘，採取一對一個別指導方式進行，要求學生逐題計算，過程中除實務操弄、紙筆運算外，研究者並針對學生代數推理過程中呈現之歸納及驗證等步驟呈現之表徵和思考方式及內容，加以訪談詢問，以深入理解其策略及思考模式，做為其代數推理及解題的分析依據。

四、資料分析

為達到上述研究目的，研究者則將學生的作業與有關的師生互動錄音資料予以轉譯為文字檔，並加以編碼。除此之外，研究者依探索、分析、歸納與驗證等階段，進行定義、歸類，形成學生解題推理的策略形式，並加以比較其特徵，以檢驗個案思考的模式。研究者採用描述方式產出研究結果，在於提供教室中，個案對此特殊例證有關代數推理活動一個完整多樣的圖像，每位個案表達的敘事與策略，皆代表了其心智發展的方向，與不同的學習軌道模式，可以為代數教學提供有效的輔導途徑，而其連貫、有順序且有效的解題策略，可以提供教師與研究者探究代數教學的模式，亦可提供我們設計代數內涵趨勢的重要指標。

肆、研究結果與討論

一、探索階段

此階段，學生必須呈現的代數推理表現有二：（一）辨識以及如何呈現需要的資料，（二）使用算數對所接觸的現象包含的變數加以塑造。本研究之三名個案在此階段皆能敏銳的感知問題情境中出現的圖卡變化數量（本研究稱為變數）差異與其之間的關係，例如：

小莛：一看就可以發現白色的圖卡增加，周圍的黑色圖卡也會隨著增加，
白色圖卡和黑色圖卡之間應該有一種關係存在吧！

經由訪談，得知個案已經明瞭本研究的目的，也知曉問題是要探索黑色圖卡與白色圖卡數量變化的關係，但在使用算數的方式塑造圖卡變化數量的關係時，個案則分別呈現不同的解題思考模式：

小莛：若要求出需要多少黑色圖卡的數量，我會直接用全部圖卡的數量減去中間白色圖卡的數量，全部的數量只要將白色圖卡＋2，×3，因為有三列，再扣掉白色圖卡的數量就行了。

教師：你的方法適合前面的問題，但是後面的問題，你想也可用這種方法解決嗎？

小莛：嗯…（看一下「矩陣覆蓋」的圖形），你看這種方式也可以解決後

面的問題，只要白色的圖卡＋2 之後，×3，因為有 3 列，再扣掉白色圖卡的數量就可以算出來了。

教師：(指著「矩陣覆蓋」的第二道圖形)，這道題目也只要×3 之後，扣掉白色圖卡就行了！

小莛：嗯……（看著圖形思考)，好像不對喔。

很清楚的，小莛已經透過視覺整體的觀察，直接利用整體扣除部分的方式進行解題方向的思考，而小雯與小佑則採取不同的方式：

小雯：我會把在白色圖卡上面和下面的圖卡加起來之後，再加上旁邊的圖卡，就可以算出有多少黑色的圖卡了。

教師：你的方式是否也可以用在後面的問題！

小雯：(嗯…）我想應該是可以的，你看白色圖卡上、下也有黑色圖卡，旁邊也有，所以加起來也就知道有多少黑色圖卡了。

小佑：我只要用數的就能知道黑色圖卡有幾塊了（指著作品)。

教師：這在覆蓋的數量很少時可以這麼做，如果覆蓋的數量很多時，你會怎麼做？

小佑：我會用畫的，畫出來後再數就可以知道了。

小雯與小佑是透過圖卡排列方式與問題的目的，將解題策略的重心放在黑色圖卡的數量上，前者擬採取分割加總的方式進行解題，後者則從計數的方式著手。從三位個案對問題解題思考策略的塑造歷程，可以分成兩種問題解題的功能加以說明。小莛是以「整體－扣除的觀點」作為其解題的依據，透過直覺、完形的方式，利用圖卡顏色差異的區別，激發出探索、解題策略的方向；而小雯與小佑，則利用環繞白色圖卡外部圖卡排列的方式，進行圖卡數量的探究，這是一種「部分－累加的觀點」。雖然兩組圖卡數量計數的方式不同，但可以明白的是，由於圖卡顏色差異產生的視覺判斷，以及圖卡排列的形式，已經引導學生產出解題探究的方向，並且設定圖卡的類型成為解題變化的影響因素，知道黑色圖卡與白色圖卡兩變數之間的關係，掌握了的解題重要的關鍵因素，只要賦予這些因素某些意義與功能，運用合宜的步驟，就能進行解題。

二、分析階段

當學生掌握了問題情境中解題的線索後，接著就需要思考如何將情境中的圖卡變化數量關係加以結構化，並檢驗現象中的瑣碎繁雜物件如何影響此模式的解釋，進而利用代數推理建立算數模式中順序的形式。

小雯：我覺得這些排好的圖形裡，上面這一列和下面這一列黑色的圖卡都一樣，而旁邊都有 2 個黑色的圍著。

教師：你能否告訴我上下這兩列的數量和中間的數量有什麼關係？

小雯：他們都比中間的多 2 塊啊！如果中間白色的是 1 塊，那麼上面和下面應該是 3 塊；如果中間是 2 塊，那麼上面和下面也都是 4 塊。

教師：從覆蓋的這些圖形中，你發現了那個地方沒有改變！

小雯：有啊，圖形的兩邊都是 2 個黑色的圖卡。

教師：你確定旁邊的這些圖卡數量都沒有改變嗎？

小雯：(重頭再看覆蓋的圖形一次)，對！它都沒變，你看，第一個圖旁邊是 2 個，第二個圖，旁邊也是 2 個，第三個圖旁邊也是 2 個，所以不管中間有多少白色的圖卡，他的旁邊都是 2 個。

從小雯「序列覆蓋」的說明，可以發現他將問題情境分為兩部分加以推理，一是圖卡排列中的「不變數」(常數)，即覆蓋圖形的兩側都是 2 個黑色圖卡，另一是中間白色圖卡數量改變而黑色圖卡數量會變動的「變數」(上下兩列黑色圖卡的數量)。這樣推理出的結構關係，呈現出覆蓋過程中，上下的黑色圖卡數量會隨著白色圖卡數量的增加而增加，而圍繞在兩旁的黑色圖卡則不會變動，一直保持著都是 2 個的數量(如圖 2 所示)。這樣的思考模式也引導著他對「矩陣覆蓋」圖形中變數關係的分析。

小雯：我發現這些圖形上、下覆蓋的黑色圖卡也都是中間白色圖卡要加上 2。

教師：你說中間白色圖卡加 2 是什麼意思？

小雯：(指著圖形) 你看，白色的 1 個，上下黑色的就是 3 個，白色的 2 個，上下黑色的是 4 個，白色的 3 個，黑色的是 5 個。

教師：你說白色圖卡 1 個、2 個、3 個只是中間白色圖卡一邊的數量而已，並不是全部的數量啊。

小雯：對啊，是一邊的數量。

教師：那旁邊是不是也和前面的一樣，都是 2 個！

小雯：只有這個圖形是 (指第一個覆蓋圖形)，嗯...其他的......

很明顯的從「序列覆蓋」的題目中，小雯經由分析並獲得了覆蓋的某些規則，有些是固定不變，維持常數的性質，有些則呈現隨著變數的增加而有規律的增加，小雯

也想將這種結構關係轉換到另一類的情境進行解題，發現有些嘗試是可行的，但有些變數則因條件不同而無法適用，尚需從中找出其他變化脈絡，這樣的差異察覺，也促使了小雯對其先前產出的推理結構發生認知的衝突，如何取得一致的解釋，則需要再將原先的結構加以調整、修正。

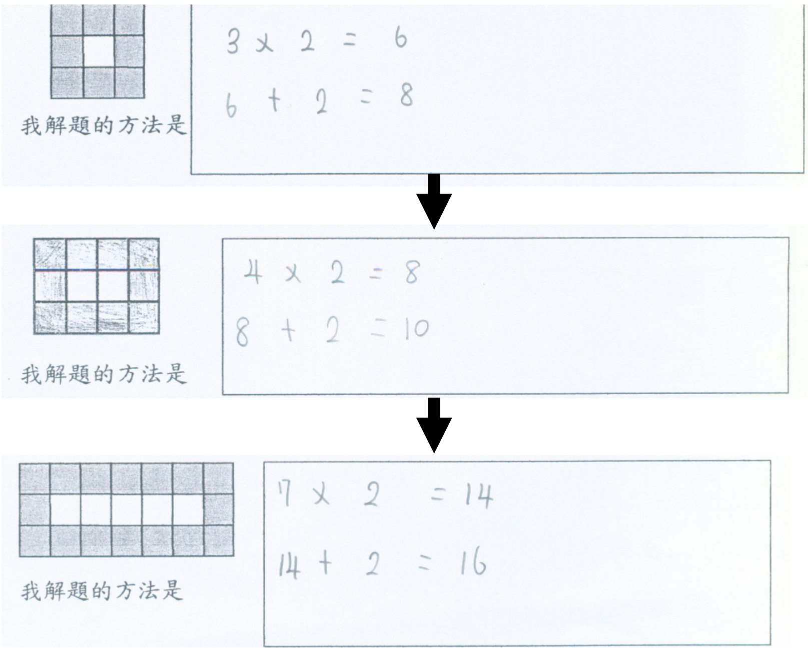


圖 2. 小雯序列覆蓋問題的思考

小莛也是以中間白色的圖卡數量作為分析的基礎，他也發現上、下兩列黑色圖卡的數目都是白色圖卡數量加 2 的關係，只是對問題情境變數分析角度不同，而採取不同的結構關係加以說明（如圖 3 所示）。

小莛：這些圖形都有 3 列，第一個圖形中間有 1 個白色的圖卡，每一列就有 3 個；中間有 2 個，每一列就有 4 個；中間有 3 個，那麼每一列就有 5 個。所以只要加上 2，就可以知道每一列的數目，乘以 3 列後再減去中間白色的就可以知道黑色的圖卡需要多少個了。

教師：（指著「矩陣覆蓋」排列好的圖形）那麼這些圖形也可以這樣解釋囉！

小莛：應該可以的，你看這每一列的圖卡也都比中間的圖卡多 2。

教師：但我發現這些圖形並不都是 3 列耶！

小莛：對啊，不過這些圖形都比白色的圖卡多 2（指著圖卡），你看一個時，就有 3 列，2 個時就有 4 列，3 個時就有 5 列，所以也都是比中間的白色圖卡多 2。

很明顯的從圖卡排列的關係中，小莛已經理解了其間行與列中圖卡數量的結構關係，從圖卡數量的比較分析，小莛發現覆蓋在白色圖卡周圍上、下列的黑色圖卡數量是白色圖卡加上 2 的關係（變數），若是「序列覆蓋」的問題，則覆蓋的圖形總共有三列（常數），若是「矩陣覆蓋」的問題，則覆蓋的圖形列數是白色圖卡每邊的個數加上 2 即可，只要求出整體的數量後，扣除中間白色圖卡的數量，就是周圍黑色圖卡覆蓋的數量。但不管是「序列覆蓋」或是「矩陣覆蓋」的問題，剛開始時小莛只以單維度呈現的圖卡數量做為推論分析的依據，在接下來的問題中，她也發現之前在「序列覆蓋」的常數，到了「矩陣覆蓋」的問題情境時，已經改變，這也造成其對所形成的關係結構的衝突，但經由教師的引導與指示，他透過觀察及變數的分析，將結構關係予以轉化了。

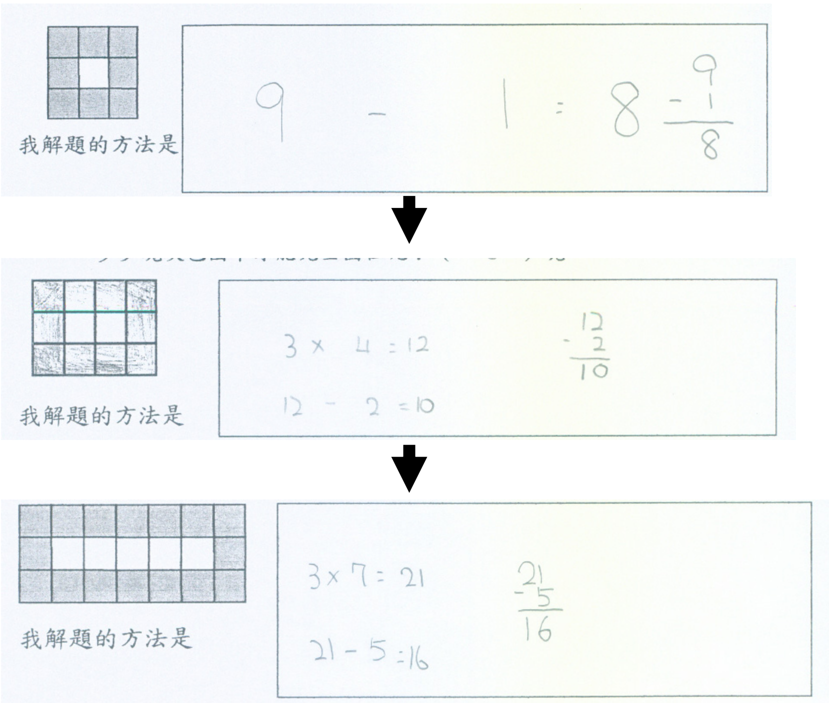


圖 3. 小莛序列覆蓋問題的思考

上述小莛和小雯分析解題的基礎是來自於圖卡覆蓋「排列變化」所產出的計算規則，而小佑則是採取所需覆蓋圖卡「數字變化」的規律，在紙上依題目解題的順序，分析圖卡之間的結構關係，記錄圖卡數量的變化，然後加以歸納（如圖 4 所示）。

小佑：白色 1 個時，黑色的需要 8 個，白色 2 個時，黑色需要 10 個，白色 3 個時，黑色需要 12 個，我發現白色增加 1 個時，黑色就會增加 2 個，白色 2 個時，增加 4 個，白色變成 3 個時，就增加 6 個，所以白色 4 個時，黑色就要 14 個，因為 4×2＝8，8＋6＝14。

教師：怎麼會有 6 呢？它是怎麼來的？

小佑：我想 1 個白色的圖卡在中間時，就要 8 個黑色的圖卡包圍，2 個白色的圖卡時，就要 10 個黑色的圖卡包圍，我想如果沒有白色的圖卡時，那麼黑色的圖卡應該要有 6 個才對。

教師：但我們的題目並沒有呈現這樣的問題啊？

小佑：我用想的，就是這樣子啊！

教師：好！你的想法很好！那這些問題，你會怎麼回答呢？（指著「矩陣覆蓋」的圖形）

小佑：中間 1 個白色的，四周就要 8 個黑色；中間四個白色（每邊 2 個），周圍就要 12 個黑色，中間 9 個白色（每邊 3 個），那麼就要 16 個黑色，所以中間白色的圖卡，每邊增加 1 個，則黑色的就會增加 4 個，如果中間沒有白色的話，應該是從 4 開始，所以中間每邊是 4 個白色的話，那麼黑色的就有 4×4＝16，再加上 4 個就有 20 個黑色的。

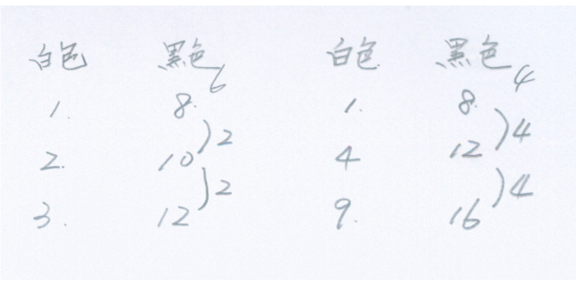


圖 4. 小佑覆蓋問題的思考

小佑的方式是分析圖卡數量的變化，加以點數然後記錄兩種變數之間數量改變的關係，而尋找出規律。在「序列覆蓋」與「矩陣覆蓋」的問題情境中，他發現了黑色圖卡的數量，只要中間白色圖卡的數量乘以變化的數量（2 和 4），加上常數（在「序列覆蓋」中要加上 6，在「矩陣覆蓋」中要加上 4）。他採取數字變化的方式，推演最初中間白色圖卡為 0 時，周圍黑色圖卡的數目，雖然題目中並無此實際的命題出現，但小佑藉著數字關係抽離情境，找出所謂的「常數」，做為任何覆蓋變化時，都需增添的「不變數」。這種推理產生的結構方式，似乎讓他在兩種不同的問題情境中，順利的獲得答案而解決問題。

從上述個案產出的結構關係歷程來看，他們都能從最初「序列覆蓋」的問題，分析出「變數」與「常數」的關係，只是應用到「矩陣覆蓋」時，產生了「變數」與「常數」解釋上不一致及不完整的說明，從小雯與小莛的例子來說，他們在「序列覆蓋」問題中所採取「變數」與「常數」的結構，在「矩陣覆蓋」的問題情境中都變成了「變數」，以致於要重新思考結構中變數的關係；而小佑發現「序列覆蓋」與「矩陣覆蓋」的「變數」是一樣的結構，但「常數」卻不同，但利用數字關係這樣的思考方式，讓他在問題的解決上較為便利，這對於代數推理的教學提供了啟示：我們應該協助學生從圖形排列的規則轉化成數字變化的規律，而讓學生歸納出合適的結構方式進行解題。

三、歸納階段

從師生的對話可以瞭解，學生透過圖形視覺排列與數字變化的規則，可以利用算數的推理深化到支持合宜的運用與操作的選擇。為了提升計算的速度與正確性，能夠理解數字之間的關係，進行規則的歸納，並透過與教師的溝通，我們鼓勵學生採用□的符號代表命題中白色圖卡的數量，使用代數的數字與數詞，呈現出白色與黑色圖卡之間變化的關係，加以推演而理解變數如何運作，並利用此種代數關係，對額外的問題加以說明。需加以注意的是，歸納的代數關係會因個案對情境採用分析思考的結構方式與解題策略的不同，而有所差異：

教師：我們用□來代表白色圖卡的數量，那麼你認為黑色圖卡的數量和它有何關係？你會怎麼表示呢？

小莛：(指著第一個「序列覆蓋」的問題)，全部減去中間白色的，所以每一列的圖卡是 1＋2，有三列，全部就是每列的數目×3，再減 1，等於 8；第二個圖形，中間白色的圖卡式 2 個，所以每一列是 2＋2＝4，再乘以 3，

然後減去 2，等於 10；中間是 3 個白色圖卡時，3＋2＝5，5×3＝15，再減去 3，等於 12。如果用□代表白色的圖卡 1 塊，可以將式子寫成□＋2 後×3，再－□；如果用□代表 2 塊白色圖卡，也可以將式子寫成□＋2 後×3，再－□，所以我覺得可以用這樣的式子□＋2，然後×3，再－□，來表示這個問題。

老師：你的想法不錯，但你確定這個式子可以幫助你算出中間是 10 個白色圖卡覆蓋的問題嗎？

小莛：在紙上寫著 10＋2＝12，12×3＝36，36－12＝24。

教師：你確定這個答案是正確的嗎？

小莛：我確定。

教師：（指著計算的結果）你能不能將計算的結果解釋給我聽。

小莛：沒問題，你看，中間有 10 個白色圖卡，所以每一列的圖卡是 10＋2＝12，有三列，所以 12×3＝36，全部再減去白色的，所以是 36－12＝24。

教師：等一下，剛才你說白色的有幾個？

小莛：10 個啊！

教師：但你為什麼要減去 12 呢？

小莛：嗯…我搞錯了，應該減去 10 個，所以答案應該是 26 個才對。

從小莛解題的步驟說明，可以理解其所歸納產出的代數式子是可以解決「序列覆蓋」的問題，只是在最後步驟減去白色圖卡的過程，會將□＋2 的數量視為是原先白色圖卡的數量，而產生錯誤。然而他所歸納推理的式子只能解決「序列覆蓋」的問題的，但若轉移至「矩陣覆蓋」的問題，則需教師予以額外步驟的導引，才能發現□變化產生的意義。

教師：用□＋2，再乘以 3，然後減去□，這種方法也可以解決這些問題嗎？

小莛：這第一個問題和剛才第一個問題是一樣的，所以 1＋2＝3，3×3＝9，9－1＝8，答案都是 8 個。但是第二個圖形，好像不能×3…

教師：不能×3，那要乘以多少呢？

小莛：應該×4。

教師：（指著第三個矩陣圖形），那這個應該乘以多少？

小莛：應該×5。

教師：你再看看第二個圖，要減去多少個白色圖卡？

小莛：4 個。

教師：你再看看第三個圖，要減去多少個白色圖卡？

小莛：9 個。

教師：若用你剛才的方法，好像算出來的結果不對喔！

小莛：嗯………

教師：你看看第二個圖，中間有多少個白色圖卡？第三個圖，中間有多少個白色圖卡？

小莛：4 個，9 個

教師：他是一個什麼樣的圖形？

小莛：是一個正方形？

教師：那全部的圖形像什麼？

小莛：像正方形。

教師：好！像正方形，你想想看正方形的面積怎麼算出來的？

小莛：喔！我知道了，我可以這樣算，用全部正方形的減去中間正方形的。

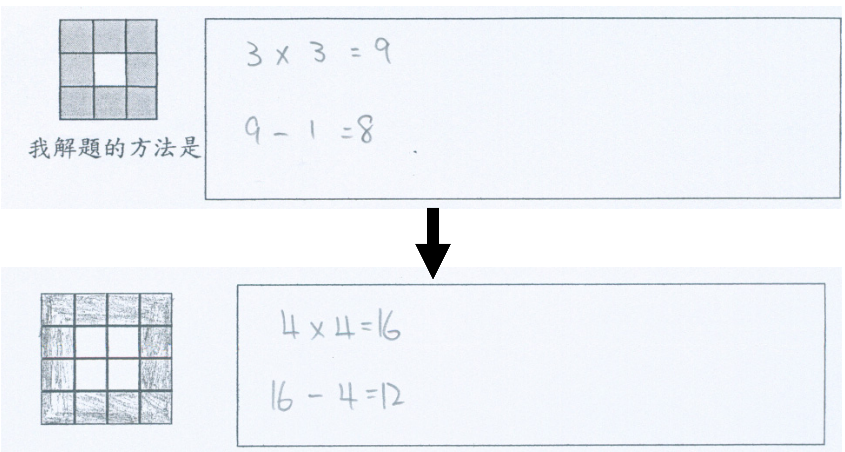
教師：很好，那你要怎麼減呢？

小莛：你看（指著第二個圖形）這個中間是 $2\times2=4$ 個白色圖卡，全部是 $4\times4=16$ 個圖卡，$16-4=12$，所以黑色圖卡等於 12 個

教師：很好，那這個圖形要怎麼減呢（指著第三個矩陣圖形）？

小莛：這個中間是 $3\times3=9$ 個白色圖卡，全部是 $5\times5=25$ 個圖卡，$25-9=16$，所以黑色圖卡等於 16 個。

到此，小莛已經明瞭到「矩陣覆蓋」中全部減去部分獲得覆蓋所需的圖卡的意義（如圖 5 所示）。



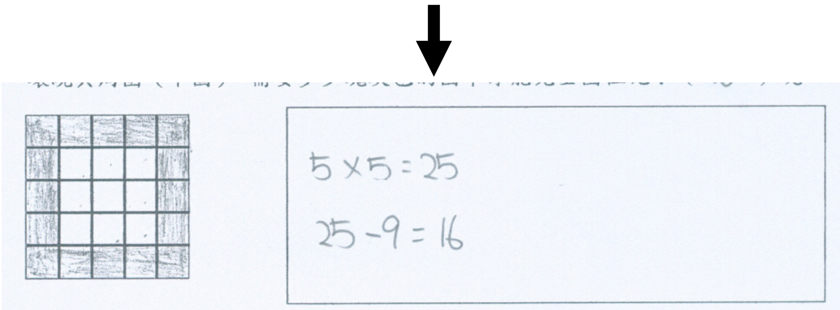


圖 5. 小莛矩陣覆蓋問題的思考

教師：算得很好，但是你如何用□來表示你解題的方法呢？老師提示你，你可以從正方形的邊來想！

小莛：我知道了，我可以把□當成中間正方形的邊，每一列也就是□＋2，剛才是乘以 3 列，(指著「矩陣覆蓋」的第二個圖形)，這要乘以 4 列，(指著「矩陣覆蓋」的第三個圖形)，這要乘以 5 列，也就是 2＋2，2＋3；所以這個圖形是□＋2，再乘以 4；這個圖形是□＋2 再乘以 5。

教師：很好，你再想想這個 4 和□＋2 有什麼關係？

小莛：(再看看圖形）我知道了，(指著「矩陣覆蓋」圖形)，這幾列都是中間白色的邊加 2。

教師：對了，那你能不能將它歸納做說明呢！

小莛：這個圖形是 2＋2＝4，有 4 列，所以全部是 4×4＝16，再減去 4＝12；這個圖形是 3×3＝9，3＋2＝5，有 5 列，5×5＝25，25－9＝16。

教師：沒錯，你將中間的白色圖卡每一邊的個數用□代表，試一試可不可以解題。

小莛：如果是 2，2＋2＝4，喔，我知道了，也就是這些圖形都可以用□＋2 乘以□＋2，然後再減去□×□就可以了。

教師：你說的很好，可以用這個方法證明中間每邊 3 個白色圖卡的問題？

小莛：3＋2＝5，會有 5 列，5×5＝25，中間白色的是 3×3＝9，25－9＝16。我瞭解了。

小莛在「序列覆蓋」解題過程歸納出來的方法是以行×列的方式解題，這些圖形中，3 列是維持不變的常數，而每列的數量會隨著中間白色圖卡的數量（□）加上 2。

然而在「矩陣覆蓋」圖形中，此□代表的意義則不是白色圖卡的數量，變成了白色圖卡排列的正方形圖形邊上的個數，另外列數變成□＋2，如此才能符應他分析階段產出的想法，即利用全部減去中間的解題方式。先前認知衝突的思考加上□的符號運用，以及教師的引導，讓小萿簡化了一些繁瑣的線索，而歸納出合適的代數公式，並協助他對解題的歷程做出合適的說明和解釋。

小佑採取數字推演的方式，在「序列覆蓋」的問題中，每增加一個白色圖卡，黑色圖卡就增加 2 倍的數量，再加上 6 個：

小佑：這些問題可以用□×2 再加上 6 就能算出答案了，如果有 10 個白色圖卡，那麼黑色圖卡就是 10×2＝20，加上 6＝26。

教師：(指著「矩陣覆蓋」圖形)，這些圖形要怎麼算呢？

小佑：中間白色圖卡每邊增加 1 個時，黑色會增加 4 個，2 個就會增加 8 個，也就是每邊增加 1 個白色圖卡，就會增加 4 個黑色圖卡，所以可以這麼想，□代表白色圖卡每邊的個數，□×4 後，再加上 4 就是答案了。你看（指第三個「矩陣覆蓋」圖形）3×4＝12，再加上 4＝16。

教師：你看這些圖形（指著矩陣覆蓋的圖形），中間白色圖卡的周圍連接的地方是否有 4 個邊，這四個角是不是都各有一個黑色圖卡，想想看和你想出來的加上 4，以及乘上 4 有關！

小佑：我知道了！□的周圍都有四邊連接著，每邊黑色圖卡的數量都和□一樣，另外四個角都有 1 個黑色圖卡，所以有 4 個，這和我想的□×4 再＋4 的想法是一樣的。

雖然小佑是採取數字變化的關係而推演歸納出代數公式，但經由教師引導後，也可以透過圖卡解釋其代數公式的意義，協助其在具體的圖卡樣式與抽象的代數公式之間做了適切的轉化與銜接。

小雯則採取將圖卡排列做規律分割的方法，進行代數公式的歸納。在「序列覆蓋」圖形方面，他將黑色圖卡分成兩部分處理，因此他歸納出的代數式子如下

小雯：兩邊總和都是 2 個，上面和下面的圖卡數量都是中間的白色圖卡數量加上 2，如果□代表白色圖卡的話，那麼可以用□＋2，乘以 2 後再加上 2 這個方式計算，你看這個圖形（指著第三個「序列覆蓋」的圖形）5＋5＝10，10＋2＝12。

但是在「矩陣覆蓋」方面小雯則碰到了與小萿同樣的問題，但他不能像小萿一樣，將□轉換成中間排列的白色正方形圖卡邊上的個數進行思考，因為中間白色圖卡數量

的改變是二維度的關係，「矩陣覆蓋」的圖形具正方形的特徵，所以圖形兩邊數量的改變是一樣的，但小雯採取分割方式解題，他必須要將□在上下列與兩旁覆蓋的關係加以釐清。

教師：給你提示，對於這些問題，你要將□代表中間白色正方形圖卡邊上的數量，你才能算出全部覆蓋的數目。

小雯：我知道，這圖形上面 3 個，下面也是 3（指著「矩陣覆蓋」圖形），但是旁邊不是 3 啊。

教師：你看一看旁邊的黑色圖卡是 1 時，中間白色圖卡是不是也是 1，旁邊是 2，中間是不是 2？

小雯：對啊！

教師：□可不可以代表中間的白色圖卡一邊的數量！

小雯：可以啊！

教師：好！那你能不能用□的方式解釋給我聽！

小雯：嗯……，嗯 ！這兩邊是□×2。

教師：好！用□代表兩邊的數量，那上下的數量應該怎麼表示？

小雯：嗯……，嗯 ！好像可以用□＋2 來表示。

教師：那你再重新說明一次。

小雯：嗯…□＋2 後再乘以 2，然後再加上□，再加上□。

小雯透過教師對其在圖形排列規則上的引導，協助其發現了「矩陣覆蓋」的代數公式，只是在歸納的過程中，小雯對於變數的抽離與轉換，似乎不是那麼的順暢，這與其在解題初始所採取的策略有關，由於分割方式使得運算所需考量的步驟增加了，雖然易於分析，但是在歸納轉換的歷程中反而變成繁瑣的因素，阻礙了代數公式的推演。這點對於學生代數推理的教學，亦提供了重要的啟示：學生在辨識變數的過程上，即應要求其對變數的關係，不管是圖形的排列或是數字的規律，應有一結構性的理解，使關係之間的連結更加順暢，也就是應該注意「歸納」與「表達」的應用。

四、驗證階段

在此階段，三名個案皆能按其驗證的方式，利用其歸納出的代數公式進行額外試題的運算。小佑除了利用代數公式計算出「序列覆蓋」中間白色圖卡邊長 10 個，而所需覆蓋的黑色圖卡數量外，另外也畫出圖形並配合「整體－扣除」的計數方式加以驗

證（如圖 5 所示）；小萿與小雯則從邊長 4 個、5 個的範例逐步驗證其發展的公式，計算黑色圖卡的數量。從三者驗證歷程產出的作業加以分析，可以明瞭其對「序列覆蓋」與「矩陣覆蓋」的問題情境皆能明瞭，並透過代數推理歷程所需的能力與技巧，歸納形成公式，進而加以運用驗證，以解決所面對的問題。

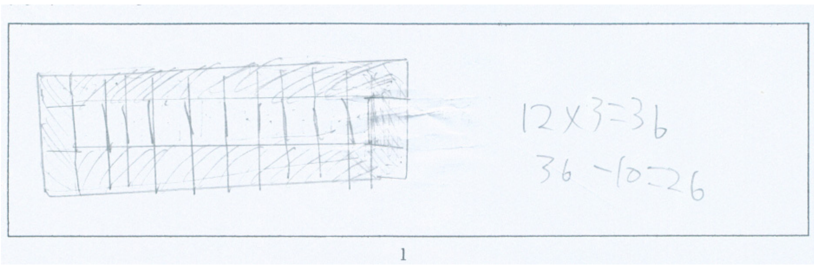


圖 6. 小佑採取的驗證方式

伍、結論與建議

一、結論

本研究之目的在於設計合適的代數推理解題情境，以了解學童在圖卡覆蓋的結構問題中如何使用代數推理策略，透過分析策略的關係、功能與類型，發現學童解題歷程有關推理能力發展的證據，提供代數融入國小數學教學的建議與措施，以改變現今教學實務，提升學生代數學習的成效。

由於先前研究提供的資料顯示，學生代數推理學習能力的發展，受限於文本情境設計與推理過程策略的運用，經由《九年一貫課程綱要》學生代數推理能力發展之分析以及對教學現場實務的剖析後，本研究設計之代數推理解題情境，卻能提供學生在推理歷程中，展現其表徵策略及解題思考的模式，進而協助吾人理解其代數推理思考方式與發展脈絡，作為實務現場教學改善的依據。根據研究結果，加以歸納，可獲得下列結論：

（一）利用合宜之學習與教學準則所設計的問題情境，可以促進學生代數推理的表現。

本研究設計之代數推理問題情境，係依據 Kaput 與 Blanton（2005）以及 Kaput（1998）等人提出的法則，安排圖卡排列覆蓋的活動，讓學生可以從中發現變數變化的規律，探討何種變數改變、以及這些變數之間有何關係，思考如何運用文字、語言、圖像、表格或符號呈現此關係，並將這些感覺連結建立結構，最後並使用建立的代數關係說明、檢驗問題情境中的變數，以解決數學問題。合宜的代數課程設計應該從學生可以探究樣式的非正式、具體的活動開始，激發學生發現規則採用語言方式描述這些樣式，最後尋找出歸納情境的方法。

（二）代數學習歷程的表現，與情境變數的理解有關，變數概念的合理轉換為學生代數學習成功的基礎能力。

研究發現，個案最終提出之代數等式與其最初對情境變數的思考路徑有關，從變數之間關係的界定，可以了解學生面臨問題情境時，對問題變數理解的程度，以及採取何種有效策略解題。亦即從中能明白學生思考的方向與認知能力的層次，配合適切的導引與成功推理路徑的指示，協助學生做有效的歸納，進而解決問題，增進學習的信心與動機。由此可知，在代數學習之初，教師即應利用各種具體表達的方式呈現變數，要求學生說明及釐清變數以及變數之間的意義與關係，確切掌握情境中變數的重要概念，如此才能促進學生關係結構歸納的學習。

（三）代數等式的理解，需利用合適的策略進行樣式的歸納，配合彈性與清晰的思考，才能建立規則的結構。

研究發現，學生採用循序漸進的步驟可以協助其釐清思考，發展代數的歸納，並且對樣式的探索與解釋提供明確的反應。從作業歷程分析，三名個案採取的彈性思考對於其從某一特殊的範例轉移到一般的規則，處理等式樣式的選擇而言，是很重要的，這樣的思考轉化可以協助理解等式關係以及重新組織歸納歷程的等式，這是一項影響代數學習歷程重要的因素。我們應鼓勵學生積極表達其操作思考的步驟及方法，說明描述其等式建構的想法，促進其對代數等式的理解。

（四）教師在代數推理歷程適度的引導與協助，有助於學生成功形成代數樣式，建立代數等式。

從研究中發現，三名個案在推理歷程展現的表達與歸納能力不同，有的急需教師適時的導引協助，提供轉化思考的途徑與方法，才能突破困境，順利解題。因此，教師對於學生推理歷程所有行為的展現應該充分了解，亦應提供充足的代數專業、知識、技巧與策略，協助學生從其思考角度所創發之方法，配合指導而順利達到代數學習的目標。

二、建議

（一）課程與教學設計方面

應提供可觀察、辨識及建立變數關係之問題情境，讓學生從中可以發現變數變化之規則，並能採取多方思考方向，建立多元推理的策略，讓學生依據其能力建構其推理解題的模式與樣式，一方面培養其學習與解題的信心、動機，一方面增進其數學概念轉化連結的能力與技巧。

（二）推理策略與應用方面

推理的問題情境除提供具體可以操弄的物件作為變數關係的分析、歸納外，尚可鼓勵學生利用各種呈現概念的表徵像是圖像、表格與符號等進行概念的表達與說明的工具，使推理的思考能透過這些表徵，使變數之間的關係更能釐清並建立結構，裨益代數樣式或等式的形成。

（三）語言表達與說明方面

鼓勵學生理解數學符號與變數之間的意義與關係，利用數學符號作為思考與運算的工具，積極說明與表達推理歷程所用之策略與方法，以釐清歸納過程之概念，支持結構合理之解釋。

（四）教師導引與誘發方面

在代數推理的歷程，教師除了對學生的表現採取激勵、肯定的態度之外，在教學上應該提供推理與歸納練習的機會，積極的給予學生回饋，並透過溝通鼓勵學生進行省思，修正以及檢驗自己解題的思考和想法。

參考文獻

中文部份

呂玉琴（1989）。在國小實施代數教學的可能性研究。*台北師院學報*，*2*，263-283。

林光賢、郭汾派、林福來（1989）。*國中生文字符號概念的發展*（國科會專題研究計畫成果報告編號：NSC-77-0111-S-004-001-A）。台北：中華民國行政院國家科學委

員會。

教育部（2000）。*國民教育九年一貫課程暫行綱要：數學學習領域*。台北：教育部。

莊松潔（2004）。*不同年級學童在具體情境中未知數概念及解題歷程之研究*。未出版之碩士論文，國立中山大學，高雄。

陳嘉皇（2006）。國小五年級學童代數推理策略應用之研究：以「圖卡覆蓋」解題情境歸納算式關係為例。*屏東教育大學學報，25*，381-412。

陳維民（1998）。*兒童的未知數概念研究：一個國小六年級兒童的個案研究*。未出版之碩士論文，國立高雄師範大學，高雄。

黃寶彰（2002）。*六、七年級學童數學學習困難部分之研究*。未出版碩士論文，國立屏東師範學院，屏東。

外文部份

Blanton M. L. & Kaput, J. (2005). Instructional contexts that support students' transition from arithmetic to algebraic reasoning: Elements of tasks and culture. In R. Nemirovsky., A. S. Rosebery., J. Solomon., & B. Warren (Eds.), *Everyday matters in science and mathematics: Studies of complex classroom events* (pp. 211-234). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Edwards, E. L. Jr.(Ed.). (1990). *Algebra for everyone*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In S. Fennel (Ed.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. & Blanton, M. (1999). *Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics: Making it implementable on a massive scale*. Paper presented at the

American Educational Research Association, Montreal, Canada.

National Council of Teachers of Mathematics. (1998). *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum*. Washington DC: National Research Council, National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.,

Romberg, T., & Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 3-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Russell, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio(Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM.

Silver, E. A., & Kilpatrick, J. (1987). *Testing mathematical problem solving*. Paper from Dialogue on Alternative Modes of Assessment for the Future. Mathematical Science Education Board.

Thompson, A. G., Philipp, R. A., Thompson, P. W., & Boyd, B. A. (1994). Calculational and conceptual orientations in teaching mathematics. In *Professional development for teachers of mathematics* (pp. 79-92). Reston, VA: NCTM.

Usiskin, Z. (1999a). Doing algebra in grade K-4. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking grades K-12* (pp. 5-6). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (1999b). Conceptions of school algebra and uses of variables. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking grades K-12* (pp. 7-13). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

文稿收件：2006 年 09 月 22 日
文稿修改：2006 年 11 月 18 日
接受刊登：2007 年 07 月 15 日

A Study on the Development Process Analysis of Algebraic Reasoning－Three Examples from Student's Cardboard Covering

Jia-Huang Chen

Assistant Professor, Teacher Education Center
Kun Shan University

Abstract

The main purpose of this study was to apply the tasks of cardboard covering, assist students to develop their capabilities of algebraic reasoning, and analyze their responses and performances on these tasks. The research findings could supply teachers with recognition and sense of student's abilities of algebraic reasoning and promote teachers' professional development. This research belongs to case study. The samples are from 3 fifth graders from one class in an elementary school in southern Taiwan. Data were collected from manipulation, investigation and interviews. Date analysis was conducted with a qualitative aspect from students' four responses stages: exploration, analysis, generalization and verification. The main results and finding were summarized and researcher provided four recommendations. In the future, teachers may apply them in their teaching practices.

Key words: Algebraic reasoning, Cardboard covering.