國民教育研究學報，第 8 期：133-158
民 91 年國立嘉義大學國民教育研究所

一位五年級學童機率概念之個案研究

陳欣民
國立嘉義大學數學教育研究所

劉祥通
國立嘉義大學數學教育研究所

摘　　要

本研究採半結構式晤談法(semi-structured interview)，探討一位未受過正式機率課程之學童的機率概念。這位學童在第一階段晤談時就已表現出具有「必然與不可能事件」和「樣本空間」的良好概念了，本研究根據其在第一階段晤談時的表現，加深、加廣本研究試題，期能更深入了解這位學童之機率概念。茲將研究發現簡述如下：一、能判斷「事件發生的可能性」，但對於「必然」、「可能」用語之掌握仍不夠準確。二、在教學者的引導下能列出完整的樣本空間。三、判斷機率事件仍受經驗的直觀概念影響。四、無法用量化思考來判斷「機率比較」問題。

關鍵詞：個案研究、機率概念、直觀概念

壹、緒　　論

「剪刀、石頭、布」!你可曾想過，這個簡單遊戲的背後隱藏著奇妙的奧密？小朋友們常用「猜拳」來解決有紛爭的問題，例如媽媽規定家中小孩有一個人要洗碗——好吧，猜拳囉，誰輸誰就得洗。雖然孩童不了解「樣本空間」、「事件發生之所有可能性」等學術用語，對方除了出剪刀、石頭、布三種拳再也不可能有別的花樣。而事實上，若出拳者是隨機出拳，猜拳的勝負就是機率的問題囉！此外，像是丟硬幣占卜、玩撲克牌、丟骰子等遊戲中也都蘊含著機率概念。這些遊戲，對孩童來說可不陌生。這樣說來，有關「機率」的基本概念對小學學生而言應該不難理解。

美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics,簡稱 NCTM）在其所出版的「Principles and Standards for School Mathematics」(NCTM, 2000)中便明確列出從學前至十二年級在機率課程方面的學習目標，正說明他們贊同在小學初期便引入機率課程的理念。而我國呢？以 82 年版的數學課本觀之，「機率」的課程單元出現得很晚，至六下才在「百分圖與發生的可能性」的單元中出現(國民小學數學實驗課程教師手冊第十一冊，民 86)，內容與其他數學領域比較起來也相對顯得太少。在此暫先不論課程安排的恰當與否，如果說某些基本「機率概念」實際上是存在日常生活的經驗及環境之中，那麼未受過正式機率課程的學生，例如我國一年級到五年級的學生，可從平時的環境和自身經驗中獲得什麼樣的機率概念呢？這是一個值得思考的問題。

研究者在一個偶然的機會下與一位國小四年級的學生小傑對談，發現他竟能回答出部份有關機率的問題，便以 Jones 的機率思考架構爲評量訪談小傑有關機率概念之問題（第一階段晤談），發現他在「事件發生的可能性」及「樣本空間」的判斷上表現良好，因此決定加廣試題，以本研究(第二階段晤談)更加深入的探討這位未受過正式機率課程的五年級學童所具備的機率概念。

貳、文獻探討

一、機率概念的內涵分析

(一)概念的意義

概念，代表事物屬性的抽象化，亦是學習的基本單位(黃台珠，民 73)。而依據「概念學習與發展理論」，兒童概念的發展會隨著個體認知的發展，由具體的層次而至抽象的(形式的)層次。機率是學童重要發展概念之一，在教學及課程設計上，有關機率的各種概念若能依據適當的概念發展層次循序漸進地教學，俾能收事半功倍之效。

(二)機率的概念

機率(又稱概率，或然率，機會)理論今日已成爲數學中重要的一支，其理論爲統計學基礎。我們習慣以分數來表示機率值，一方面它代表的是對某數主觀的預測值，但另一方面它又爲特定的事件提供準確的、客觀的比例。(Konold,1983)

以學術上的定義而言，機率是指對於一次隨機的試驗(trail)，其結果帶有很大的偶然性，似乎並無規律，但在大量的重覆試驗中，就可能會呈現一定的規律性，有些事件發生的可能性大些，有些事件發生的可能性小些，我們將刻劃事件發生的可能性大小的數量指標稱作該事件發生的機率。(耿素雲和張立昂，民 85)，或者「設一個樣本空間由 n 個元素組成，又設每一元素出現的機會相等，則定義事件 A 發生的機率爲 A 之元素個數與 n 之比，記爲 p(A)=n(A)/n，其中 n(A)爲 A 的元素個數。」(de Laplace, P.S.,1880,轉引自黃提源，民 66)。

二、兒童機率概念的發展

兒童機率概念的發展正如其他的概念發展一樣，皆爲由具體到運思層次，逐漸成熟。本節簡介了幾位學者對兒童機率概念發展的看法，另外，Jones 等人(1997,1999)所提出的兒童機率思考架構亦在此節有簡要的說明。

(一)兒童機率概念發展的階段性

Piaget 和 Inhelder、Bognar 和 Nemetz 皆曾對兒童機率思考的階段性提出看法，以下分別簡述他們的主張：

1. 依年齡區分：

(1)以七歲及十四歲做區分的年限(Piaget & Inhelder, 1975)：Piaget 和 Inhelder 認爲兒童在機率概念發展上可分爲三個階段，七歲以前的兒童是屬於第一階段，在此階段兒童處於運思前期，還無法區分事件之必然性和可能性。他們在一個隨機的混合事件中將嘗試去尋找次序性。例如有甲、乙兩事件，甲事件在前幾次中出現的次數較多，此時期的兒童會預測下一次會出現乙事件，其理由是「乙常被跳過」。這時期的兒童常以所觀察的事件多量作爲預測判斷而完全忽略了群體的比值。例如一個箱子有三

個黑球和一個白球，另一個箱子有六個黑球和二個白球，當問他們從這兩個箱子隨意拿一個球出來，是黑球的機會哪一個較大？他們會認爲是後者，理由是後者有六個黑球，故拿到黑球的機會較大。此外，他們也不具有「操作可逆性」的想法。如果你從袋中拿出一個紅球再放回去，兒童會覺得下一次再隨機拿一球，拿到紅球的機會將變少，因爲他們覺得紅球已被拿出來過了，第二次應會再拿到其他顏色的球，可見此時他們尙未具備隨機的概念。而七到十四歲的兒童是屬於第二階段，此階段兒童處於具體運思期，已能認清事件之必然性和可能性，但尙無法以有系統的方式去產生一個有系列性的機率概念。在這個階段，兒童似沒有組合的技巧或數學的成熟度來建立機率實驗抽象的模式。直至十四歲以上的兒童才屬於第三階段，此時兒童已處於形式運思期，且開始發展他們的組合分析的才能，並能瞭解相對次數的極限。

(2)列出兒童於各年齡階段之機率概念發展(Bognar & Nemetz,1977)：Bognar 和 Nemetz 的研究發現：兒童在七至八歲時可以教導簡單的概念，像確定事件(certain events)、不可能事件(impossible events)、互斥事件。(mutually exclusive event)；在九至十歲時，可依據可能發生的事情教導較可能事件(more likely events)、較不可能事件(less likely events)及次序事件(order events)；在十一至十二歲時可以教導相對次數(relative frequencies)及畫表示機率事件的圖表(diagrams)（如樹狀圖）；在十三至十四歲可以教導獨立(independent)和相關(correlated)的實驗和事件。他們也認爲，應依據兒童年齡的發展來進行適當的機率教學。

2.以思考層次去區分

以上研究是以「年齡」做爲機率概念了解度的指標，然而，針對學童的機率思考提出一套有系統的架構的研究較少，唯有學者 Jones 等人提出了一套機率思考架構的理論。Jones 等人所提出的這個架構可用來當作檢測學生機率思考的工具。以下便簡述此理論架構：

爲了能有系統地描述和預測學童對於機率問題的思考，Jones、Langrall、Thornton 和 Mogill(1997)提出了「機率思考四層次」的理論。他們訂出了學童在樣本空間、古典機率、機率比較、條件機率等方面的機率思考層次，之後又增添了以預測和實驗爲主的實驗機率和由條件機率引伸出來的獨立事件。
(Jones, Thornton, Langrall, & Tarr,1999)

Jones 等人認爲，在上述每一個機率結構上，學童的概念發展層次皆包含了四個層次：

層次一是主觀的(subjective thinking)思考層次，在此一層次的學童只基於個人

的主觀想法或喜好來處理機率問題。

層次二是過渡的(transitional)層次，學童思考是界於主觀的和質樸的(naïve quantitative thinking)量化思考之間，但其思考結果最後往往又返回主觀的想法。

層次三是非正式量化(informal quantitative thinking)的層次，學童已能做量化思考，但尚未具備足夠的分數概念。

層次四是思考發展的最高層次，學生完全使用生產性策略去描述結果，已能用分數完整的表現出其數量的推理。(numerical reasoning)

三、兒童機率直觀及迷思概念

直觀概念較爲強調的特色，是：它是一種認知的型態，是每個人自然而發的一種信念，也是腦中立即出現的意念，是不證自明(self-evident)的。(Fischbein, 1987)。直觀概念可能是對的，亦有可能是錯的，錯的直觀概念便歸屬於迷思概念的範疇了。本研究無意特別去探究兒童機率直觀及迷思概念之關係，只是因爲研究機率迷思概念的學者，如Fischbein (1984, 1987, 1991)也曾探討諸多機率方面的直觀概念，因此，在這裡一併將機率直觀概念及機率迷思概念做一個簡要的敘述。

(一)兒童的機率直觀概念

很多關於數學教育和心理教育的研究皆顯示，學童在未獲正式機率課程教學之前，都可以從日常生活中的擲硬幣、丟骰子和抽撲克牌等遊戲中獲得與機率概念有關的直覺想法(Doherty,1965;Williams & Shuard,1989)。直觀概念可分爲兩種，一種是初始直觀(primary intuition)，指的是個體在未受任何系統性指導，因個人本身經驗影響而發展的直觀概念，如認爲「太陽一定從東方升起」。另一種是二階直觀(secondary intuition)，指的是個體在由系統性指導後所產生的一個新的認知信念，必須由個體投入一個活動中才能獲致。如在課堂上受同儕文化、教材或是教師對教材解釋之影響而產生的概念，如某學生由課程中習得大數法則之意義，當有人問及：「投一枚硬幣一千次，結果可能是什麼？」時，此學生可能馬上產生：「差不多一半一半。」的這種想法。(Fischbein, 1984)。

學童在兩種情況下很容易使用直觀想法來判斷機率的大小：

第一種是「“必然”(certain)、“可能”(possible)、和“不可能”(impossible)的事件」，舉例來說，一般咸認爲，學生較容易了解「必然發生」和「不可能發生」事件所代表的意義。但 Fischbein(1984)發現，學生會以「很有可能」代替「必然」之用語，以「很少」來代替「不可能」。例如持此概念的學童言會認爲轉一個有 100 個刻

度的轉盤，「出現 31」是「不可能」的，因為「機會太小了」。可見，他們對「必然」概念的理解遠比我們想像得還難。第二種是「複合事件（compound events）」例如，學生在面對題目:「投擲一粒骰子，出現以下三種情形的可能性為何？a.比 7 小的數　b.比 6 大的數　c.出現 5」時，會直覺反應 a 選項「很有可能」，而非回答「必然」。另外，學生在面對題目：「同時丟兩個骰子，一個出現 5 一個出現 6 的機率大，還是兩個都出現 6 的機率大」時，可能因為曾在課堂上學過「對稱性機率中所有樣本點發生的機會一樣」，因而忽略了「一個出現 5 一個出現 6」的情況有兩組，而誤以為「兩者機率相等」。(Fischbein, 1991)。

(二)兒童的機率迷思概念

「迷思概念」(misconception)是指：學生在某一特定學科中，對某事件或某現象所持有的，異於目前科學家所公認的想法。他們認為，學生在面臨現象或問題時，為了要瞭解、解釋所遇到的那個問題，會使用一些信念、方法和「內在架構」。Tversky 和 Kahneman(1974)的研究即指出，人們在做機率判斷時常會使用一些捷思策略(heuristic strategies)，這些捷思策略時常造成快速且大致上合理的結果，但卻往往和機率理論相違背，而妨礙學童在機率推理上的發展(羅昭強、施登山、朱雅瑋，民 84)，且造成教學和學習上的困擾(Konold,1991,1993)。

茲將學者歸納出，學生在面對機率問題所可能會有的迷思概念分述如下(吳靜瑜，民 88)：

1.代表性捷思策略（representativeness）:

採用此一策略的人們，對可能的事件作決定時是基於事件分配的情況是否能確實地反映出母群體的分配，或者對事件之樣本空間的抽樣過程是否符合隨機，即使單一事件也不例外(Kahneman & Tversky,1973; Shaughnessy,1977; Fischbein & Gazit,1984)。此事件又有下列幾種典型：

(1)符合母群體隨機過程分配典型：

受試者傾向於認為樣本的抽樣，必須能反應母群體的分配情形，如此才符合隨機化的過程。(Kahneman & Tversky,1973；Shaughnessy,1977; Shaughnessy,1992)如：當受試者被問及面對六個小孩的出生序列，何者最有可能發生？若提供的選項為(A)男女女男女男(B)男男男女女女； 研究結果發現，大部份受試者選擇(A)，因其過程較符合代表性的隨機化分配，且符合 50-50 的分配。

(2)符合理想母群體分配典型：

受試者在面對機率問題時，會認為不同樣本點出現的次數比，應是與樣本點在理

想母群體中的機率比一致(朱雅瑋，民 85)

例如：在投擲一枚硬幣的實驗中，若連續投擲六次，其可能出現的結果爲何？會採取此代表性策略的學童相信，「正正反正反反」的順序比「正正正正正反」較易出現，因其認爲這樣才能顯示出正面與反面出現的次數各佔一半。但事實上，兩者出現的機會是相同的，而非以出現的次數來決定機率的大小。

(3) 正時近效應 (positive recency effect)：

若受試者發現在已出現的母群體中，有些樣本點出現的比例較大，則受試者有根據既存的母群體分配，以預測下次出現的機率何者有較大的傾向，這種方式稱之爲正時近效應。例如：在投擲一枚硬幣的實驗中，連續投擲六次，若前五次皆是正面，則認爲第六次還是「正面」。

(4) 負時近效應 (negative recency effect)：

負時近效應又稱爲「賭徒謬誤」(Gambler" s Fallacy)。與使用「正時近效應」策略的人思考方向正好相反。以上一題例子爲例，認爲第六次是「反面」。

2.可獲性捷思策略(availability heuristics)：

使用此一策略，人們在對事件做預測是建基於「內心對特定例子容易憶取的程度來估計事件發生的可能性」，也就是說，傾向於利用容易建構、容易記得或容易從記憶中喚起的例子來做預測 (Tversky & Kahneman,1974,1983；Shaughnessy,1992)。例如雖然買彩卷中獎的機率很低，但人們在買彩卷時，心中浮現的是他們記憶中的「某某人已經得獎」的消息，因而覺得「中獎率其實很高，自己很有可能中獎」。

3.結果取向(outcome approach)：

使用此一策略的學生在思考不確定事件的情況下，會認爲他最主要的目標是「對下一次試行的結果作出正確的決定」，而非估計其發生的可能性。當他們採取這樣的直覺想法，則稱之爲「結果取向」(Konold,1983)。根據他的研究發現，採取結果取向策略的學生會以 50%的機率做爲指標，用來判斷某事件是否發生的依據，若高於 50%則判定爲「確定會發生」；低於 50%則判定爲「確定不會發生」；等於 50%，則學生的反應爲「不知道」或「無法判定」。

4.忽視樣本空間大小對預測準確性之影響：

受試者在處理機率問題時，忽視了樣本空間的大小，而只根據前後次數比例推測 (Sieqler,1981)。亦即，受試者在面對樣本點分配均勻，或樣本點次數比值相同的不

同的試驗時，會依其所呈現出的比例關係來做爲判斷機率大小的依據，而未考慮其試行次數的不同，因爲不同的試行次數，代表不同的樣本空間大小。

例如：學生會將「投擲一枚硬幣十次出現五次正面」的機率，和「投擲二十次出現十次正面」的機率視爲相等；然而，此二者之樣本空間大小並非一樣，其機率所表示的意義也不同。

5.對稱性機率實驗與非對稱性機率實驗

在機率實驗之樣本空間中，每一樣本點可能發生的機會在直觀上是相等的，即謂「對稱性機率實驗」；反之，則謂「非對稱性機率實驗」。如果受試者不具備「分辨」這兩者差別的能力，則其作答很容易流於用「每一事件機率均等」的想法去思考而導致錯誤。如例子「每天上午 10 時的天氣可能出現晴天、陰天和雨天。那，明年元旦上午 10 時的天氣可能出現晴天的機會有多少？」很多人會認爲是 1/3，但忽略了晴、陰、雨的機會根本不相等(林燈茂，民 85)

6.以絕對差異的大小爲依據

受試者在面對機率試驗時，會依據各樣本點出現次數的差異大小，或以試驗中各樣本點個數的差異來作爲判斷的依據，而非以比例性的觀點來預測事件可能性的大小(施能宏，民 86)。例如，面對問題「小華和大明分別投擲一公正的 10 元硬幣 10 次和 20 次，小華投 10 次，出現正面 3 次反面 7 次；小明投 20 次，出現正面 6 次反面 14 次，請問誰的正面反面次數比較平均？」時，以「7-3=4，14-6=8，8＞4,所以小華的投擲比較均勻。」(林燈茂，民 85)。

參、研究方法

本研究屬於個案研究，主要是採用半結構性晤談法(semi-structured interview)。目的是延續本研究個案於第一階段晤談的表現，再進行第二階段晤談以期更加深、加廣去探討一位未經正式機率教學的國小五年級學童所具備之機率概念。

一、研究對象：

本研究的研究對象，小傑(化名)，在國小四下時參加第一階段的晤談。由於 Jones 的機率思考架構中的古典機率部份與 Piaget 理論中「必然與不可能事件」是重疊的，另外研究者在預試時發現條件機率與獨立事件超出小傑的能力，因此僅以 Jones 的機

率思考架構中的樣本空間、實驗機率、必然與不可能事件、機率比較等四方面去評量小傑所具備之思考層次。在此階段晤談中，小傑於「樣本空間」的概念已達到能列出投擲兩枚及三枚硬幣、「四人三三排列」的完整樣本空間的程度。於「必然與不可能事件」概念的測試中亦已能說出事件發現的可能性大小，但仍停留在語言敘述的階段，無法用數值表示。小傑的數學成績在班上算中等，大部份都考九十幾分，但有時會因為粗心而考八十幾或七十幾。從他平時上課的表現可看出他的數學思維其實蠻靈活的，老師稍微提示一下他就能領悟，有時還能自己想出漂亮的解法。不過，因為從小若他算不出答案，父母就很嚴厲的處罰、責備他，因此他對自己的數學能力缺乏自信，若成功解題且受到老師稱讚他就顯得相當高興，想繼續算數學習題，但在面對從未學過、又比較困難的數學問題時，會顯得很沒有信心解題，情緒也變得很低落，不耐煩也不想思考解題。

二、訪談問題

本研究之訪談目的主要以 Piaget、Jones 的理論做為參考，欲驗證本研究個案機率概念之發展與此兩位大師之說有何異同之處，因此，訪談問題係研究者先蒐集並閱讀相關文獻，由 Piaget、Jones、Fischbein 及其他相關研究中選出適當題目，並加以修改而成。

由於研究個案的「樣本空間」及「必然與不可能事件」概念在第一階段訪談時表現良好，因此相較於那時的題目，如「投擲一枚及兩枚硬幣所有可能出現的情形」，研究者於本研究之試題中加廣「樣本空間」範圍，如：「投擲一粒骰子，可能會出現什麼情形？」，以及「投擲兩粒骰子，要出現總和為 7，所有的情形有哪些？」另外，為更加了解個案在「必然與不可能事件」的認知概念，亦加入「投擲一粒骰子，以下三種情形的可能性為何？a.比 7 小的數　b.比 6 大的數　c.出現 5」，以與預試的問題「太陽明天從西方升起，你覺得這件事的機會大不大？請你用數字表示」做持續比較，看看研究個案之機率概念是否有所進步。

另外，為了了解個案是否存有迷思概念，亦加入題目如：「一枚硬幣連續投擲五次，前四次都是正面，請問第五次是正面的機會有多大?」和「小明投籃 10 次，3 次進籃；小米投籃 20 次，5 次進籃，請問誰比較厲害？」至於在第一階段晤談中沒有測試的「實驗機率」、「機率比較」及「獨立事件」等問題，亦在本研究中給予題目試驗。

三、資料收集與分析

一、資料蒐集

本研究第一次訪談日期是民國九十年九月二十日，第二次訪談時間是九月二十七日下午，共兩小時半。而由於此兩階段皆採用半結構式晤談法(Patton, 1990)，目的在了解研究個案之機率思考模式的觀點，因此所蒐集到的資料皆是質性的資料。在研究個案寫試題的過程中，研究者視需要對某一問題進行深入且較完整的詢問，以確實探究個案真正的機率概念。全程皆有錄音及錄影。

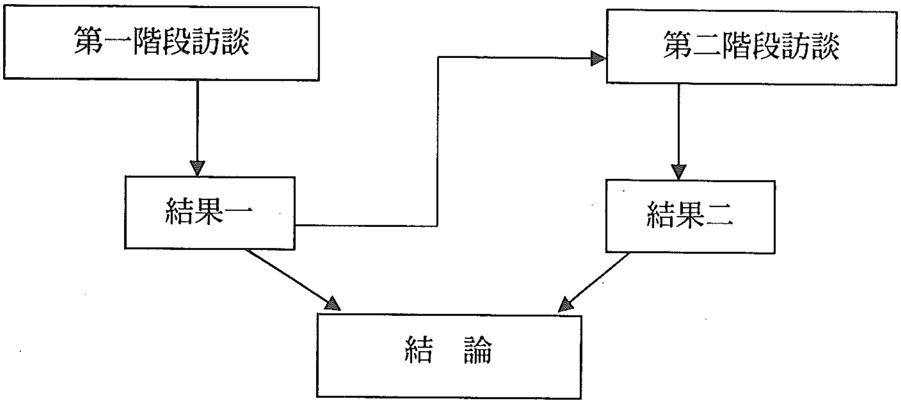
二、資料分析

在訪談後，研究者將學童的紙筆紀錄與錄影實況進行轉譯，並兩相對照以求完整呈現。編碼時，日期以 6 碼呈現，如 900920 即代表民國九十年九月二十日，而原案轉錄資料由 1001 開始寫，為了精簡篇幅，行號不一定連續。大寫 I 代表研究者，S 代表訪談個案小傑。接著，研究者對這些轉錄的資料進行分析，並依照不同的內容將資料下標籤，以回饋於下一次的訪談，而可更深入地探討小傑的機率概念。

本研究有兩位研究者參與，第一位研究者是師院數理教育系畢業，現在就讀於數學教育研究所，第二位研究者是一位數學師資培育者。在研究進行時，由第一位研究者擬定訪談大綱，經第二位研究者修飾以提高專家效度；有關小傑機率概念的研究發現，第一位研究者定稿後，皆再由第二位研究者確認才提出研究結果與結論以增加分析者信度(analysist reliability)(王文科，民 88)。此外，在訪談的過程中，為了確定研究對象的機率思考概念，研究者採用「持續比較」的方式期能增進工具之信度(instrument reliability)(王文科，民 88)。

四、研究程序

為了更深入了解小傑目前所具備之機率概念，本研究採用持續訪談的方式，每一次訪談都根據前一次訪談的結果設計訪談試題，或變化問題情境以驗證上一次訪談之信效度，或加深、加廣試題難度以更了解小傑之解題思考，或增加其他領域之試題以探測小傑在這些領域的表現。茲將本研究程序圖示如下：



(圖1 研究流程圖)

肆、研究結果

茲將本研究所獲得之主要發現點列如下：

(一)　能判斷「事件發生的可能性」，但無法準確地使用「一定」與「可能」等用語

(900920)

1001I：根據科學家的研究，太陽是從東邊升起。你覺得太陽明天從西方升起的機會有多少？

1002S：　不可能啊！

小傑在預試時能肯定說出「明天太陽不可能從西邊出來」，以及「明天行星一定會繞著太陽公轉」。這一點符合 Piaget 和 Inhelder(1975) 的理論。因此研究者用思考難度較高的問題去詢問他，例如「投一顆骰子出現比『7』小、比『6』大」的問題，看他是否能正確使用「一定」、「可能」或「不可能」等用語。結果發現他尚不能正確地使用「一定」與「可能」等用語，仍需藉或研究者反問提示由實際試驗輔助才能說出正確之用語。

(900920)

1010I：你覺得投一顆骰子，出現比「6」大的機會大不大？答案請用「可能」、「一定」或「不可能」表示。

1011S：不一定！

1012I：可不可以說得清楚一點？

1013S：就是有時會，有時不會啊！

1014I：會的情形有哪些？你說說看！

1015S：……咦，不可能！

…

1018I：你覺得投一顆骰子，出現比「7」小的機會大不大？答案請用「可能」、「一定」或「不可能」表示。

1019S：可能！

1020I：只是「可能」嗎？

1021S：對呀，就是很有可能啊！

1022I：嗯，你看哦……(實際丟擲)這次出現「2」，再來是「5」，再來是「3」……都比「7」小耶！

1023S：啊，答案是「一定」！

(二)透過與研究者合作解題激發他使用「最大位移策略」來描述樣本點：

在本研究的第一次晤談時，小傑可以列出一枚硬幣投擲兩次、兩枚硬幣同時投擲及投擲一粒骰子的完整樣本空間，亦能回答出投擲兩粒骰子使「總和爲 7」的所有樣本點。但由於他不能使用最大移位策略，因此無法完整列出同時投擲兩粒骰子的樣本空間。

(900412)

0006I：你現在手上有一個十元，如果你將他往上丟，落下來算一次，那你連續丟兩次的結果可能是什麼？

0007S：第一次正面、第二次正面，第一次反面、第二次反面，第一次反面、第二次正面，第一次正面、第二次反面。

0008I：只有這些嗎？

0009S：對。

0010I：(拿給他一枚十元一枚五元硬幣)你把這兩枚硬幣同時往上丟，落下來的情形是什麼？把你覺得所有可能會出現的情形寫出來吧！正面用正表示，反面用反表示。

0011S：正正、正反、反正、反反

0012I：「正正」是什麼意思？

0013S：兩個硬幣都是正啊！

0014I：還有沒有？

0015S：沒有了。

(900920)

1026I：(給小傑一顆骰子)你投投看，會出現幾種情形？

1027S：(完全沒投)簡單啦，1.2.3.4.5.6

….

1030I：這兒(交給小傑兩粒骰子)哦！要怎樣才能出現「兩顆骰子出現的數加起來是 7」的情形？你可以把所有可能出現的情形寫出來嗎？

1031S：哎呀，不用丟我也知道，是 3 和 4、6 和 1 嘛！

1032I：只有這些嗎？

1033S：對呀！

1034I：可能還有，但是也有可能沒有了，再想想看哦！

1035S:啊，還有 5 和 2！

1040I：你能將投兩粒骰子所有可能出現的情形寫出來嗎？請你用一個括號代表一次投骰子的結果，兩顆骰子的點數用逗號隔開，例如，第一顆骰子出現 2，第二顆出現 3，就寫(2,3)，這樣可以嗎？

1041S：可以。(一個人丟兩顆骰子，將所得的結果寫下，共寫了十三種)(5,6)、(6,5)、(2,5)、(1,3)……

1042I：為什麼你覺得只有這些？

1043S:丟兩顆骰子要丟很久，而且這題答案太多了，好煩喔！我不知道要丟多少。

有鑑於預試及第一次訪談的經驗，研究者發現，雖然小傑能求出部份較簡單的樣本點問題，但若碰到樣本空間太大、樣本點組合太多的問題時，則會顯得不耐煩也不知所措。如上述「一次投兩顆骰子」，他一個人丟兩顆骰子，不知道什麼時候會窮盡答案。因此，研究者在第二次訪談中改變遊戲方式，先將問題改成較簡單的組合，如「每人 1~4 張撲克牌，各出一張，可以有幾種結果？」玩了幾次以後，他自己便有所領悟：「我只要一直出 2 就好了」，研究者追問：「你一直出 2，我有可能出什麼？」「1 到 4 啊」他很快地反應。如此換個遊戲方式竟然激發他自行用「生產性策略」解題。研究者再用同樣的骰子問題問他，這次他不用丟就能用生產性策略排出 36 種了！

(900927)

1250I：(給小傑一顆，自己一顆骰子)我們來玩玩看，我們同時丟出去，你有一個數字，我也有一個，把結果記錄下來。

(玩了 3、4 次)

1251S：我都不要動了，一直出 2 就可以了。

1252I：你只要出 2 哦？那我可以出什麼？

1253S：當然是 1.2.3.4 呀！

1254I：(在紙上寫下(2,1), (2,2),(2,3),(2,4))我還有沒有別的可能？

1255S：沒有了，我再一直出 3！

1256I：喔，那我可以出什麼？

1257S: 當然也是 1.2.3.4！

1258I：你會像老師剛剛那樣記嗎？

1259S：會！(寫出(3,1), (3,2),(3,3),(3,4)

…….

1270I：你可以把所有結果寫出來嗎？

1271S：可以！(在紙上由(1,1),(1,2)…..寫到(4,4))

….

1274I：(給小傑一顆，自己一顆骰子)我們再來玩另一個遊戲，我們同時丟出去，你有一個數字，我也有一個，把結果記錄下來。這樣下來，你可不可以猜出所有可能的結果？

1275S：(自言自語)我一直丟 2，你就出 1.2.3.4.5.6 ，我一直出 3，你就出 1.2.3.4.5.6………

1276I：你可以在紙上把所有可能寫出來嗎？

1277S：可以。(在紙上寫下(1,1),(1,2)…..寫到(6,6)，如附圖一)

1278I：還有沒有？

1279S：沒有了！

(三)不能根據樣本空間以判斷「樣本點出現的機會」

在第一次訪談時，小傑認爲在同時投擲兩粒骰子時，他認爲「同時投兩顆骰子，出現一個『5』一個『6』」和「同時出現兩個『6』？」的機會一樣大。因爲他認爲樣本點(5,6)和(6,5)是一樣的，似乎犯了「簡化樣本點」的錯誤思考。因此研究者利用「分段佈題」，先用簡單的樣本空間讓他判斷樣本點出現的容易程度，再回到原先的問題問他。

(900920)

1120I：同時投兩顆骰子，出現一個「5」一個「6」比較容易發生，還是出現兩個「6」？

1121S：一樣大啊！
1122I：你覺得(5,6)和(6,5)有一樣嗎？
1123S：一樣啊，一個出現「5」一個出現「6」嘛！

(900927)

1320I：請你把投擲一枚十元和一枚五元硬幣會出現的所有可能結果寫出來。正面用「正」表示，反面用「反」表示。
1321S：(寫下正正、正反、反正、反反)
1322I：很好！那你覺得出現一個正面一個反面較容易出現還是兩個正面較容易出現？
1323S：一正一反吧！
1324I：為什麼？
1325S：不知道，用猜的。
1326I：用猜的哦！那你怎麼猜的呢？
1327S：用直覺的啦！
1328I：(指著已求出的所有樣本點)你可以參考所有的資料後回答哦！
1329S：(不注意研究者所指的樣本點，只一味強調自己的直覺)我只會用猜的啦！

1330I:回到剛剛我們玩的撲克牌遊戲，你覺得「一張是１一張是４」和「兩張都是４」的情況哪個比較容易出現？
1331S：都一樣。
1332I：為什麼？
1333S：直覺啊！
1334I：你上一題也是用直覺，那這兩題的直覺為什麼不一樣？
1333S：不知道。我就是直覺這樣。
…
1336I：那再來看這個我們一起丟兩顆骰子的遊戲。你覺得出現「一個 3 一個 4」和出現「兩個 4」哪種情形較容易出現？
1337S：都一樣。
1338I：為什麼？
1339S：用直覺猜啊！

原本做完第一次訪談時研究者認爲他犯了「簡化樣本點」的迷思概念，但從第二次晤談看來，可以發現，小傑的問題在於，他根本不會依據樣本空間裡的所有樣本點出現情形來判斷某樣本點出現的機會大小。也就是說，他不了解在對稱性機率中，每個樣本點出現的機會一樣，要判斷哪一個樣本點較容易出現只需要看其在樣本空間所占的比例即可。因此即使研究者讓他看著已求出的樣本空間作答，他亦不了解其關連性而忽視之，並以直覺作答。

(四)以日常生活經驗判斷兩事件間的「獨立性」

在第一次訪談時，小傑於「硬幣投擲」的問題情境中，認爲「硬幣第六次的擲結果與前五次皆無關」，似乎具有「獨立事件」之概念。不過單憑這樣的回答並不代表他確實具有概念，因此研究者在第二次訪談中改變問題情境問他。

(900920)

1085I：這兒有一枚硬幣，如果今天老師連續丟了 5 次，5 次都是正面，那你覺得第 6 次會出現正面還是反面？哪個機會大？

1086S：有可能出現正面，也有可能出現反面。都一樣啊，

1087I：為什麼都一樣？前面出現了 5 次都是正面耶！會不會影響到第 6 次的結果？

1088S：不會啊，第 6 次正面和反面出現的機會都一樣啊。

(900927)

1290I：長城和萬里兩人同時舉弓射擊，你覺得萬里射中圓心會不會影響長城射中圓心？

1291S：會。

1292I：為什麼？

1293S：因為有可能萬里射箭時撞到長城。

1294I：如果他們倆站得很遠，不會撞到呢？

1295S：那可能不會。不過我還是覺得有影響。

…

1298I：這次數學小考，你、你旁邊的同學和你最要好的朋友都考 100 分。你們三個人的分數有關係嗎？

1299S：有。

1300I：為什麼？

1301S：可能有作弊啊！

1302I：如果沒有作弊呢？

1303S：那就沒有關係了。

由上述談話看來，在「硬幣投擲」的問題情境中，小傑一直強調「有可能正面也有可能反面，正反面出現機會一樣」，有「獨立事件」的味道，然而，在「射擊」和「考試」的情境中，由於有「人爲」的參與，因此他反而不確定事件發生之關連性。以常理來推斷，例如「射擊」，他覺得「怎麼可能一人射箭不會影響另外一個人呢？」，而且他也覺得「大家怎麼都考一樣的分數？很有可能有作弊哦！」變成以日常生活經驗中所產生的直觀想法作答，而非以數學世界中所強調的「理想狀態」去思考。

(五)做機率比較問題時，誤以「絕對差異」判斷答案

(900920)

1050I：小米和小麥常去買愛國獎券，小米買 10 張中 3 張，小麥買 20 張中 5 張，如果你也要，你覺得託誰買中獎機會較大？

1051S：都有可能。

1052I：為什麼？

1053S：每次運氣都不一樣，以前買的運氣和現在買的運氣又不一定相同。

1054I：如果下次買運氣還是相同，那你會不會看這些數字回答？

1055S：那就是小麥了，因為他中 5 張。

…

1060I：小皮和小卡打籃球，小皮 3 球中一球，小卡 6 球中 2 球，誰的『中球率』高？所謂中球率是指投手投球的厲害程度。也就是投中球越多次，他的『中球率』越高！這樣你知道嗎？

1062S：(點頭）我知道。我覺得是小卡。

1063I：為什麼？

1064S：小卡中兩球耶！小皮只中一球！

1065I：5/20 和 3/10 哪個大？

1066S：5/20

1067I：為什麼？

1068S：因為 5 大於 3。

小傑以試驗中各樣本點個數的差異來作爲判斷的依據，只比較出現的樣本點次數，而沒有考慮到樣本空間不一樣，不是採用比例性的觀點來預測事件可能性的大小，爲一迷思概念。這點符合施能宏(民 86)及林燈茂（民 85）的研究發現。另外，可看出小傑的分數比較概念尚未成熟。

(六)無法以量化思考來判斷「機率比較」問題

小傑解機率比較問題之前，研究者先讓他回答幾個含有分數概念的問題，結果發現小傑能理解「部份—全體」的意義，然而，他只會比較同分母的分數大小。

(900920)

1077I：箱子裡面有一顆紅球一顆白球，你知道紅球占全部之多少嗎？

1078S：1/2。

1079I：很好。你知道在下面這些圖中，斜線部分占全部的多少嗎？

1080S：(順利寫出 1/4、2/5、3/9、20/100)。

1081I：2/5 和 3/5 哪個大？

1082S：3＞2，當然是 3/5。

1083I：2/5 和 3/8 哪個大？

1084S：….我想是 3/8。

1085I：為什麼 3/8 比較大？

1086S：因為 3＞2，所以 3/8 比較大。

1087I：可是一個分母是 5，一個是 8 耶！

1089S：我沒學過這種。我只會比較分母一樣大的。

由於基礎的機率比較問題只牽涉到分數之「部份—全體」的層次，因此研究者接下來便將上述問題之問題情境改變成機率問題情境，卻發現小傑雖然有「部份—全體」的概念，但當面對問題「有兩顆包裝相同的糖果，其中一顆被拿到的機會是多少？」時，只以主觀的好惡去判別哪顆球被拿到的機率較大，也無法使用量化思考來回答每顆糖果被拿到的機率值是 1/2。若箱子裡頭兩樣物品的數量多寡有差距，他才略可判斷出何者被抽中的機會較大。但他並非採用機率值的分數表示來做判斷，而是直接以絕對差異的觀點去看。

(900920)

1090I：袋子中放了一顆紅球，一顆白球。你閉著眼伸手進去拿一顆出來，你比較有可能拿到什麼顏色的球？

1091S：白色

1092I：為什麼你覺得白色被拿到的機會比較大？

1093S：猜的。

1094I:怎麼猜的？

1095S:我比較喜歡白色啊！。

1096I：你會用一個分數來說明白色球被拿到的機會嗎？

1097S：7/10

1098I：這是怎麼算出來的？

1099：我不會，用猜的。

(900927)

1350I：媽媽買了一包水果糖，其中 80 顆是草莓口味的，20 顆是百香果口味的，草莓口味占全部糖果的幾分之幾？

1351S：80%

1352I：如果你把包裝搖晃均勻，倒出一顆糖果，跑出來的比較可能是草莓還是百香果口味的？

1353S：都有可能。

1354I：為什麼？

1355S：每次倒出來的都不一定啊！

1356I：老師是問「比較有可能」哦！

1357S：那就是草莓了。

1358I：為什麼？

1359S：因為草莓比較多，所以比較可能跑出草莓。

1360I：你覺得倒出來是草莓口味的機會是多少？

1361S：不知道。

1362I：如果這樣說，你覺得倒出來是草莓口味的機會是百香果口味的幾倍？為什麼？

1363S：80/20，4 倍。

1364I：你覺得倒出來是百香果口味的機會是草莓口味的幾倍？為什麼？

1365S：1 倍

1366I：1 從哪裡來？

1367S：將 1 改掉，寫下 0.2(實際上應寫成 1/4 或 0.25)

由上述訪談原案可看出小傑對於判斷「誰的機會大」之概念相當模糊，因爲他未受過正式機率之課程與教學，因此不了解機率的表示法是與母群體做比較，而無法

使用量化思考來判斷，若兩物的數量相當，他便認爲「都有可能」抽中，卻說不出一個「數值」來說明他的想法。有鑑於此，研究者不強迫他以分數來作答，而改採用倍數關係訪談他，如第二次訪談原案所示，若兩物的數量有多寡之分，小傑即使可說出草莓口味占全部的幾分之幾，他依然不能用分數來表示草莓被抽中的機會，而當研究者改用倍數關係來問他時，他才能用「4 倍」來表示草莓比百香果被抽中的機會大多少。

伍、結論與建議

一、 結論

根據研究結果，我們對於小傑目前所具備的機率概念做出以下幾點結論：

(一)小傑對於「必然」、「不可能」用語之掌握仍不夠準確

小傑能藉由日常生活的經驗去判斷一些簡單事件發生的可能性，如「明天行星一定會繞著太陽公轉」，和「太陽不可能從西邊升起」，但面對較難的題目如「投一粒骰子，出現『比 7 小』和『比 6 大』」時，則以直觀想法做模糊的判斷，用「很有可能」代替「一定」，用「較不可能」代替「不可能」，需要研究者引導才能改變觀念，答出正確用語。這點類似 Fischbein(1991)的研究結果，另外，也顯示小傑還是必須透過具體物操作實驗才能改正觀念，這點亦符合 Piaget 和 Inheldler(1975)主張 7 至 14 歲兒童是屬於具體運思期的論調。

（二）在教學者的引導下能列出完整的樣本空間

由第二項和第三項研究結果可看出，小傑在較簡單之樣本空間的求解時表現良好，例如，他能答出投擲一枚硬幣兩次及兩枚硬幣同時投擲的所有可能情形，寫出「四人兩兩排列」的完整樣本空間，亦能回答「投擲兩粒骰子，出現總和爲 7 的所有可能情形」，但當碰到「同時投兩枚骰子」的問題時，因爲無法使用「最大位移策略」，致使他無法求出完整的答案。經由研究者先簡化問題成「兩份 1~4 的撲克牌排列情形」，並改由兩人互相出牌，他便自行領悟可以先固定一者的牌數，只需窮盡另一邊之牌數。這對於未接受過正式機率課程的學生而言，實是難能可貴的。若將此點與 Jones 架構比較，小傑是介於 Jones 架構分類的層次三和四之間，只需適當引導即能跳升至層次四。

(三)判斷機率事件仍受經驗的直觀概念影響

以第三項研究結果觀之，當小傑在判斷問題「連續擲 6 次硬幣，前 5 次都是正面，第 6 次會出現正或反面」時，並沒有被前 5 次的結果誤導，而堅持「第 6 次發生正、反面的可能性是一樣的」，似乎具有判斷獨立事件之能力，因此研究者以另外兩個問題情境「射靶」和「分數相關」來讓他判斷兩事件間的關係，發現小傑並非以客觀之數學思維去判斷兩事件之關係，而是利用其日常生活經驗去判斷。例如，即使他說不出確實的理由，他亦堅持認爲「兩人同時射箭必定有相互影響的作用」，以及「考試大家分數相同，很可能有作弊的情形」。

另外，從研究結果六所呈現的原案行 1090~1095 可看出，在兩種顏色的球數量相等時，小傑以自己主觀的好惡去判斷哪種顏色的球較容易被取出，而非由數量的多寡做判斷的依據，也是一種直覺的反應，因爲他比較喜歡白色，所以覺得應該較容易拿到白球。

（四）無法用量化思考來判斷「機率比較」之問題

由第五項研究結果觀之，小傑在做機率比較問題時，只注意最後出現的樣本點次數，而忽略了樣本空間之大小，換言之，他不是採用比例性的「相對差異」觀點來預測事件可能性的大小，而是以「絕對差異」之觀點來判斷機率比較問題的大小。爲一迷思概念。這個發現符合施能宏(民 86)及林燈茂（民 85）的研究結果。

由第六項研究結果觀之，即使兩物數量有所差異，小傑僅能判斷「較可能」和「較不可能」，卻無法以分數（或小數）表示「機會大小」。由行 1079~1082，可見他能以分數來表現「部份——全體」之關係，也可以比較同分母異分子的分數大小，但卻無法以分數表示「機會大小」，因此研究者推測，可能與他未真正了解「機率」表示法——事件 A 之元素個數/所有事件之元素個數——有關。另外，他雖然可回答出「草莓口味的機會是百香果口味的 4 倍」，但當研究者將句子中的草莓和百香果的位置互換(行 1364)時，他反而無法以分數「1/4」來回答。可見，小傑對於分數中基準量轉換的部份有待加強。

由以上的幾點結論可以發現，正如 Fischbein(1987)所提出的「初始直觀」之說，小傑即使未接受過正式機率課程，他的機率概念並非如一張白紙，而是在面對關於機率的問題時，已能夠用自己的一套想法去判斷答案，而這套想法是其經由日常生活經驗累積而得的。同時，本研究之幾點發現也有幾處與 Piaget、Jones、Fischbein 等人之理論相同之處，也進一步驗證了兒童機率概念發展的概況。

二、　建議

以下，茲就本研究提出幾點關於課程與教學上的建議：

(一)對於課程上的建議

1.宜加強兒童對於「必然」與「不可能」用語的掌握

由本研究第一項研究結果觀之，小傑雖能判斷一些日常生活中的「必然與不可能事件」，但若面對較難的數學情境問題，如「投一顆骰子出現比『7』小」的情形時，便無法準確的使用「必然」或「一定」的用語肯定回答，而僅認爲「很有可能」。因此研究者建議，在課程的設計上，除了佈與日常生活有關的問題情境，如「雞蛋由三樓丟下會破的情形」讓學生判斷事件發生的可能性以外，可以再加入其他如「投一顆骰子出現比『6』大」或「某國選手籃球賽已打入前四強，請問他有可能是第一名嗎？可能是第六名嗎？」等例子，以增強學生對於這些用語的掌握。

2.分數之大小比較課程應爲機率比較課程之先備知識

由第五項研究結果觀之，小傑目前仍不能使用量化思考來判斷機率大小，他誤用「絕對差異」來判斷機率發生的大小，可能也與其分數大小比較概念尚未成熟有關。雖說會異分母異分子的分數比較不見得會回答機率問題，但若要回答機率大小比較一定要先具備成熟之分數概念。因此研究者認爲，雖然機率某部份課程可放於低中年級的部份，但機率比較之單元應放於分數課程之後才是合宜課程之編排方式。

(二)對於教學上的建議

1. 採用「合作學習」及「分段佈題」之教學方式

舉第二項研究結果爲例，小傑原本不能回答出「同時投擲兩枚骰子之完整樣本空間」，因爲他一個人丟兩顆骰子不知何時才能窮盡答案，但當改由與研究者兩人各執一顆骰子，並面對簡化過的問題情境(4 張對 4 張撲克牌)時，他便能自行產生解題策略，並回到原來的問題情境成功解題。因此研究者建議，當學生於學習樣本空間求法時，教師可採用分段佈題的方式，先簡化問題，讓學生從簡單的樣本空間著手，增加學生信心，再由簡入繁，增加問題情境之難度。而由於較複雜的樣本空間多牽涉到排列、組合，因此教師不妨採用「合作學習」的方法，讓學生藉由問題情境以更加清楚如何去排列、組合出完整樣本空間。

2.設計實際試驗與驗證的教學活動以幫助學生認識機率值

由第四項研究結果觀之，小傑並不會根據樣本空間以判斷「樣本點出現的機會」。明明他已經能寫出樣本空間中所有的樣本點了，但由於他尚未了解「機率」之「或然率」的意涵——事件 A 發生機率的理想值是其與母群體之所有事件之比值。有鑑於「機率」這種抽象的意涵，研究者認爲，如何設計教學活動以幫助學生量化思考，了解機

率的意義及寫出正確的機率值是一個值得深思的課題。研究者建議，可以使用以下兩種活動來幫助學生學習：

第一個活動是「已知母群體的分配情形」，進行實際試驗後，與「觀測值的分配情形」做比較，經由多次比較後，期能讓學生體會：當我們以分數來表示觀測值時，其理想值就是母群體的分配情形。例如先讓學生看到箱中有 7 個白球 3 個黑球，再請他不看球而抽取，一次抽取一球共抽 30 次，取後放回並紀錄結果。將抽取結果與母群體比對，看看抽取結果是否接近母群體分配。接著再變換箱中球的顏色分佈，如換成 5 個白球 5 個黑球，活動程序不變。依此類推進行數個回合，直至學生能體會其間相關性。

再來進行另一個與前述相反的活動，先不讓學生看到「母群體的分配情形」，只告知他母群體的總數，經由多次實際試驗後，讓他根據試驗之紀錄去推測實際母群體的分配。在學生做推測後讓他將自己原先推測之結果與實際母群體比對，我們亦希望學生能經由此一活動體會：當我們以分數來表示觀測值時，其理想值就是母群體的分配情形。例如袋中放四顆球，一黑三白，但先不讓小傑看到顏色分佈情形，只跟他說有四顆球兩種顏色。請他在沒看到球的情形下每次從袋中抽取一球，取後放回共抽三十次，並紀錄結果。根據結果要他猜猜看，四顆球中有幾顆黑幾顆白？接著換袋中球顏色的分佈情形，如九黑一白、三黑六白……其餘活動程序相同，依此類推進行數個回合，期能讓學生由這兩個活動過程中建立對「機率」的認識，並接著引入機率值的觀念。

參考書目

王文科(民 88)。*教育研究法──第五版*。台北：五南圖書出版公司。

朱雅瑋(民 85)。*國小學童機率的直觀概念*。新竹：國立新竹師範學院未發表之碩士論文。

林燈茂(民 85)。國小職前教師的「機率概念教學知識」與「機率概念知識」之初探。*八十五學年度師範教育學術論文發表會*。台東:台東師範學院。

吳靜瑜(民 88)。*國小六年級學童機率概念之研究*。嘉義：國立嘉義師範學院未發表之碩士論文。

耿素雲、張立昂(民 85)。*機率統計*。台北：儒林書局。

黃提源(民 66)。*機率入門*。台北：協進圖書有限公司。

施能宏(民 86)。*國小高年級學生機率文字題表現之研究*。台中：國立台中師範學院未發表之碩士論文。

黃台珠(民 73)。概念的研究及其意義。*科學教育月刊，66*，44-56。

羅昭強、施登山、朱雅瑋(民 84)。小學職前教師的機率直觀概念。*新竹師院學報，1*，43-55。

臺灣省國民學校教師研習會(民 86)。*國民小學數學實驗課程教師手冊第十一冊*。台北縣：臺灣省國民學校教師研習會。

Bognar, K. & Nemetz, T. (1977). On the teaching of probability at secondary level. *Educational Studies in Mathematics, 8*, 399-404.

Doherty, J. (1965). Level of four concepts of probability possessed by children of the fourth, fifth and sixth grade before formal instruction. *Dissertation Abstracts, 27*, 1703A.

Fischbein, E. & Gazit, A. (1984). Do the teaching of improve probability intuitions? *Educational Studies in Mathematics, 15*, 1-24.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel

Fischbein, E. (1991). Factors Affecting Probabilistic Judgments in Children and Adolescents. *Educational Studies in Mathematics, 22*(6), 523-549

Fischbein, E. (1999). Psychology and Mathematics Education. *Thinking and Learning, 1*(1), 47-58.

Hawkins, A. & Dapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability-A psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 349-377.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill. A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in Probability. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 101-125.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., & Tarr, J. A. (1999). Understanding Students' Probabilistic Reasoning. In Stiff L.V. & Curcio F. R. (Eds.), *Developing mathematical analyzing in grades k-12: 1999 year book*(pp146-155). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In von Glasersfeld, E.

(Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*(pp139-165). Holland: Kluwer.

Konold, C. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about Probability. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(5), 392-414.

Kahneman, D. & Tversky,A. (1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. *Cognitive Psychology, 5*, 207-232.

National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for school Mathematics. Reston,* Va: NCTM .

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. London: Routledge kegan paul

Siegler, R. S. (1981). Developmental sequences within and between concepts. *Monographs of the Society for Research in Child Development, 46(2)*, 175-186.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconception of probability: An experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at college level. *Educational Studies in Mathematics, 8* (3), 295-316.

Shaughnessy, J. M.(1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. InD.Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp.465-494). New York: Macmillan.

Williams, E. & Shard, H. (1989). *Primary mathematics today (3thed) for the age of the calculator*. London: Longman Group.

A Case Study of a Fifth Grader's Probability Conceptions

Hsin-Min Chen

Shiang-Tung Liu

Abstract

This study adopted semi-structured interview to explore the probability conceptions of an fifth-grader who has never accepted courses and instruction about probability. According to his good performace on "certain and impossible events" and "sample space", we made the tests on this study deeper and broader in order to realize more probability conceptions of this case. The followings were his probability conceptions: 1. He could judge the possibility of events, but he couldn't use the words "certain" and "impossible" well. 2. He could find out complete sample space under the instruction. 3. He was still affected by intuitive conceptions s when he judged some probability events. 4. He couldn't compare the more or less possibility by mathematical thinking.

Keywords: case study, probability conceptions, intuitive concepts