國民教育研究學報，第3期：25～44 頁
民86年，國立嘉義師院國民教育研究所

國小兒童解題策略與數學能力之關係
— 以解「積木問題」為試探

周立勳　劉祥通
國立嘉義師範學院

摘　要

本研究旨在探討國小學童數學解題策略與其數學能力的關係。研究者以自編積木問題、高低階單位置換問題、比例問題及數學成就測驗、數學解題行為評量表為工具，對嘉義地區282名國小六年級兒童進行施測。結果顯示，國小兒童正確解積木問題呈現四種解題策略類型，而不同解題策略類型之兒童在數學能力上有顯著差異；兒童之數學能力能有效區別單一與多重解法；不同解題策略類型與能否正確解答較高層次問題有關。本研究並討論研究結果在國小數學解題教學上的涵義。

壹、前　言

國小數學教育主要目的在培養兒童解決問題的能力。自80年代之後，數學教學有一明顯趨勢即是「將數學視為解題」的教學(黃敏晃，民83)。雖然此一觀點早已反映在國小數學課程(民64)的總目標上，然而長久以來，國小實際教學的現況仍大多因襲傳統，以習得數學知識為最終目標，以正確答案來判定學童是否達成目標，而忽略知識獲得的過程(周筱亭，民84)。其結果，可能造成學生習於熟練計算技巧，記憶各類文字題的標準解法或公式，卻無法推理思考。

所謂解題(problem solving)，依據美國數學督導委員會(the National Council of Supervisors of Mathematics, NCSM, 1989)的闡釋「解題是一種過程，它利用已學過的知識去處理新的或未知情境的歷程」(p. 45)。在解題的歷程

中學生可經驗到數學的用處、合理性、與威力(NCTM, 1989)。解題也可以被操作性的定義為一種情境，在此情境中目標是可以達成，但是通往目標的直接路徑是暫時被阻擾的(Barba, 1989)。解題本身涉及高層次的思考技能而不是簡單的回答知識層次的問題而已。因此，兒童的解題表現常被視為評估教學成效的重要指標。

我國國小數學教育存在的缺失，特別是數學解題教學，曾反映在一些跨文化的研究發現中。例如，Strigler, Lee, 與Stevenson(1988)曾比較日本、美國及我國國小兒童的數學知識，顯示我國五年級兒童在數概念、分數概念及整數的四則運算方面均優於另外兩國，但在解應用問題上卻表現得比較差。尤有進者，譚寧君(民79)比較中美六年級兒童數學態度與解題能力，發現我國兒童比較上雖有較高的解題能力，但解題方式卻較為僵化，大多採用同一模式。相對的，美國兒童平均解題能力較差，但思考方式卻較多元化。此一結果可能與我國數學教學上過於強調「標準」答案與程序有關。然而，值得關注的課題是，研究並未指明究竟兒童之單一(標準)抑或多元的數學解題方式對數學教學有何重要的涵義?

理論上，解題是一種綜合能力，幾乎包含了所有的心理歷程(劉秋木，民85)。因此探討兒童解題的心理歷程與表現，以作為改進數學教學的基礎，便成為數學教育研究領域十分重要的課題。國科會於民國七十五年便將「解題導向的數學教學」列為發展四大重點導向的研究計畫之一(引自，楊瑞智，民83)，十年來，國小數學解題方面的研究仍相當零散。這些研究主要的發現，若依Lester(1980)對數學解題本質的分類觀之，探討問題結構有關「作業變項」的研究上，如，國小兒童乘除法的概念、不同表徵形式題目的解題歷程表現與數學學業成就具有顯著正相關(陳美芳，民84);問題結構認知表現與解題表現有相關存在(張再明，民83)。其次，在分析「解題者特質」的研究上，如，國小學生的數學學業成績、解題策略的使用次數與學生解題能力有正相關(林碧珍，民78；81)；學生解題表現與後設認知有正相關，而與數學焦慮有負相關(涂金堂，民84)。探究「解題歷程」的研究如，兒童解題的成敗與解題行為的差異有關(劉錫麒，民78)；不同能力的兒童在數學解題過程有差異(楊瑞智，民83)。在檢證「教學變項」的研究上，如，圖示法與圖示教學對國小低年級兒童解題無顯著影響，但對高年級兒童卻有良好

的效果(吳昭容，民81)；「合作-思考」教學在學生解題與反省思考能力的學習上，要比「解說-接受」教學更有效果(劉錫麒，民80)等。

這些發現固然反映了國小兒童數學解題表現與數學能力的關聯，以及指出教學策略是影響學生解題表現的重要關鍵。但對於要將研究成果累積成為教師改進數學教學的知識，則尚十分有限，除非數學課程與教學能獲得整體的改造。

目前，國小新課程已開始實施(民85)，新課程即是採用建構論的觀點，強調解決非例行性問題(non-routine problem)，養成學生主動思考問題的習慣。此一改革的動向包含讓兒童建構數學的意義，反省自己的解題過程，自行建構解題活動等。在「由兒童自行建構解題活動，以進行有意義的學習」的教學蘊涵上，教師應扮演「佈題者」的角色，使兒童成為真正的解題者(甯自強，民82)。新課程留給兒童多元化的解題空間，學童在教師提出關鍵性問題之後，要提出自己的解題方法，允許其有「路徑差」，不強迫要求用同一格式解題(劉好、許天維，民84)。依建構論者的看法，知識不是訊息的堆積而是認知結構的建造，而且問題的結構是存在社會與情境的意義中(Confrey, 1991)。因此，教師面對新課程的教學時，必須能認識兒童解題表現與運思能力發展的關聯。如是，未來研究在如何協助教師從學生不同解題的表現中瞭解學生數學的能力，解讀學生學習數學的成果，可能是必須努力的方向。

最近，研究者在進行寫作活動融入國小數學解題的教學實驗時，發現由教學者佈題鼓勵兒童自創解法的過程，兒童經常有提出不同解題方式而獲至相同答案的表現。兒童解題時使用的策略除可能隱涵著不同運思發展層次外，亦可能顯示不同數學能力的表現。職是，為考驗此一想法，本研究擬探討的問題有三：1.兒童不同解題策略是否可反映出不同的數學能力，亦即，使用不同解題策略解題之兒童在數學能力表現上是否有差異？若有差異，那麼，2.藉由數學能力能解釋此種差異的效力如何？以及3.不同解題策略在解決較高層次運思數學問題之表現上有否差異？

貳、研究方法

為探討上述問題，本研究採用測驗調查法。茲就研究樣本、研究變項、研究工具以及施測過程說明如下。

一、研究樣本

本研究以接受研究者進行「寫作活動對國小數學解題能力影響」實驗教學的實驗班與控制班兒童為施測樣本，包含嘉義縣、市三所學校7個班級，282名國小六年級學童，其中有144位男生、138位女生。

二、研究變項定義

本研究擬待探討的變項主要包含國小學童之解題策略與數學能力。所謂解題策略係指兒童在解非例行性數學問題時，為獲取答案所採用的運思方式而言，本研究將就兒童在研究者自編解題測驗上之解法試探其解題策略類型；而數學能力則指兒童具備與數學有關之概念、計算、與問題解決能力而言，本研究以兒童在數學成就測驗及解題表現量表上的得分為指標，得分越高者表示其數學能力越高，反之得分越低者表示其數學能力越低。

三、研究工具

（一）自編數學解題測驗

構想：

本研究假定兒童解題的策略與數學概念運思發展層次有關，根據研究文獻(甯自強，民81；82；84;吳仁俊，民85)指出，兒童數概念的發展可依序分為：合成運思(integration operations)、累進合成運思(progressive uniting operations)、部份—全體運思(part-whole operations)、測量運思(measurement operations)以及比例運思等階段。其中，部份全體運思與測量運思的發展約顯現於中高年級階段，而比例運思可能遲至六年級以上階段，因此，本研究的問題結構至少必須涉及部份全體運思與測量運思兩個層次。

由於兒童使用的解題策略可能與其運思發展有關，因此為偵測兒童不同的解題表現，研究者希望所設計的「問題」必需能滿足三項條件：1)非例行性問題，即非教過或學過的問題；2)難度不高，即多數兒童能正確解題；3)具鑑別力，即兒童解題能表現出不同策略與運思發展層次。

編製過程：根據前述研究構想，研究者自編研究工具的過程為：

1．首先，研究者藉朱建正所設計如下至少需兩步驟解題的問題，測試168位國小學童，並要求受試寫出解法。結果，有156名受試能正確解題(92.86%)。

900顆酵母片，每天都吃18顆，連續吃了38天後，剩下的還可再吃多少天？

2.對正確解題受試所列寫之解法進行分類，結果呈現兩種典型的解題策略，其中95名使用第一種解題策略(60.90%)，61名使用第二種解題策略(39.1%)。

(1) 第一種解題策略

38×18=684　或　900-(38×18)=216

900-684=216　　216÷18=12

216÷18=12

(2) 第二種解題策略

900÷18=50　或　900÷18-8=12

50-38=12

3.檢視受試解題策略。第一種解法係以「一顆」為單位的解題策略，而第二種解法則是以「十八顆」(一天)為單位的解題策略。雖然此一問題結構頗符合本研究構想，惟，兒童是否僅能使用一種策略解題？仍不得而知，如果進一步要求兒童嘗試不同的解法，則可能會出現多樣的解題策略表現。

4.決定問題及答題型式。研究者乃參考吳仁俊(民85)研究題材(頁47)及前述問題結構，編擬「積木問題」。為瞭解受試想法，答題時要求受試寫出解法、想法以及其他解法。同時，為探求兒童不同解題表現與解需較高層運思問題表現之關聯，另設計「高低階單位置換問題」及「比例問題」各一題。本測驗共三題，施測作答時間訂為30分鐘。

5.完成正式施測試題如下：

第一題(積木問題)

小華喜歡排積木。有一天，他打算將所有的積木都排成7個一排，現在他已經排了8排。請問他還要排多少排才會排完91個積木？

你的解法是：

你的答案是：

你的想法是：

這題還有沒有其他相同答案而不同的解法？如果有，有多少種？請你寫出來看看。

第二題(高低階單位置換問題)

有幾位小朋友玩彈珠，他們訂下的規則是，1個紅色彈珠可以換5個綠色彈珠，1個綠色彈珠可以換4個黑色彈珠。根據他們所訂的規則，請問：

1）1個紅色彈珠可以換幾個黑色彈珠？

2）3個紅色彈珠可以換幾個黑色彈珠？

3）4個紅色彈珠加上2個綠色彈珠可以換幾個黑色彈珠？

第三題(比例問題)

有甲、乙兩根鐵棒粗細和質料都相同，甲鐵棒長12.5公分、重4公斤，乙鐵棒長17.5公分，那麼乙鐵棒的重量是多少公斤？

（二）數學成就測驗

本測驗為周台傑、范金玉(民75)根據國小數學課程標準(民64年)，及各年級教學指引(民68-74)所編製的。測驗分低、中、高三級，分別適用於國小各年級，作為鑑定特殊兒童、評估兒童數學能力、發展教學方案。本研究對象為國小六年級學童，且未完成上學期課程，故採用高級測驗五年級試題施測，用以偵測樣本數學能力。

測驗包含「概念問題」、「計算問題」、以及「應用問題」等三項分測驗。採團體施測，時間各為15分鐘。計分方式為答對一題給1分，五年級試題三項分測驗最低分為0分，最高分分別是19、18、與20分。測驗間隔四週重測信度為.80，

在效度方面，與學校數學科成績之相關介於.76-.90之間，與數學成就標準測驗得分的相關介於.82-.83之間。

本研究以三項分測驗的得分作為數學能力的指標，兒童得分愈高表示其數學概念、計算與應用的能力愈高。

（三）數學解題量表

為評量兒童數學解題能力，本研究採劉秋木(民78)所編製之「數學解題行為評量表」(甲式)。本測驗主要係依Polya(1945)所提解題歷程的四個階段—瞭解問題、擬定計劃、執行計劃、回顧與評估整個過程，編選非例行性(non-routine)的文字題。每個文字題編有三至五個選擇題，每個選擇題含有四個選項(思考策略)，其中僅有一個正確的或最好的策略。

本測驗分甲乙兩式複本，每式含64題選擇題。採團體施測，作答時間約一小時。適用於國小五年級至國中二年級，甲式難度平均52.50，乙式難度平均53.08。信度方面，甲乙兩式相關為.86；效度方面，甲式與數學學期成績、性向測驗及數學診斷測驗分數之相關，約在.72至.81之間。本研究將解題能力視為數學能力之一，兒童在解題能力測驗的得分愈高，表示其解題能力愈高。

為瞭解數學成就測驗三項分測驗與解題測驗之間的關聯，本研究分析受試四項分數間的交互相關，如表1所示。各項分數之間有中度以上的相關存在，且皆達.001顯著水準。

表1　數學成就分測驗與解題測驗之交互相關(N=277)

	概念測驗	計算測驗	應用測驗
計算測驗	.6982**	—	—
應用測驗	.7305**	.7678**	—
解題測驗	.6511**	.5743**	.6830**

$*\ p < .01 \quad **\ p < .001$

四、施測過程

研究者利用數學寫作實驗教學期間，於八十五年九月間分別至實驗學校班級實施數學成就測驗，十月間再實施解題測驗。十一月間試編解題試題，進行試探性的調查，至十二月完成正式解題試題設計後，再商請實驗教學者協助施測。全部施測工作至十二月中旬於受試班級進行「比和比值」單元(第11冊，第十單元)教學之前完成。

參、結果

測驗調查結果，有效樣本280份經評定與分類後，在解「積木問題」的反映上，除解題失敗或錯誤(N=38;14%)外，共呈現四種解題策略類型：類型Ⅰ—以「一個」為單位的解題策略(如，7×8=56；91－56=35；35÷7=5)，而無法提出不同的解法(N=50；18%)；類型Ⅱ—以「七個」為單位的解題策略(如，91÷7=13；13－8=5)，無法提出不同的解法(N=18；6%)；類型Ⅲ—先採類型Ⅰ解題再提出類型Ⅱ的解法(N=119；43%)；類型Ⅳ—先採類型Ⅱ解題再提出類型Ⅰ的解法(N=55；20%)。

若以傳統單一解題答案的評量方式觀之，兒童在「積木問題」的解題，有七成兒童的策略屬於類型Ⅰ(含類型Ⅲ)，三成解題策略屬於類型Ⅱ(含類型Ⅳ)。當要求兒童嘗試提出不同的解法時，則有七成兒童有能力提出二種以上的解法(類型Ⅲ、Ⅳ)，而近三成的兒童只能提出一種解法(類型Ⅰ、Ⅱ)。

本研究的第一項問題是：受試在解積木問題的不同策略類型的表現是否能反映出不同的數學能力？根據表2所列，不同類型之受試在數學概念、計算、應用與解題測驗得分的平均數，解題錯誤兒童之四項數學能力的平均數，很明顯的均低於其他正確解題的兒童。而正確解題表現中類型Ⅲ、Ⅳ之間及類型Ⅰ、Ⅱ之間的平均數十分接近，但前者又高於後者。

表2解積木問題不同表現之受試在數學概念、計算、應用及解題測驗上之平均數與標準差

變　項	錯　誤(N=38)		類型Ⅰ(N=50)		類型Ⅱ(N=18)		類型Ⅲ(N=119)		類型Ⅳ(N=55)	
	X	SD	X	SD	X	SD	X	SD	X	SD
數學概念	8.50	3.33	11.66	3.59	11.22	3.51	14.18	3.20	14.22	2.79
數學計算	9.10	4.46	12.30	4.01	12.17	3.97	15.07	2.70	14.64	2.96
數學應用	7.37	3.58	10.24	4.08	9.78	4.78	13.62	3.82	13.69	3.66
解題能力	22.26	7.89	28.08	8.59	27.33	8.78	33.75	9.42	33.56	9.42

N=280

由於四項數學能力指標之間存有顯著的中度相關，為進一步探求四種解題類型兒童之數學能力的差異情形，則以四組解題策略類型為自變項，四項數學能力分數為依變項進行多變量變異數分析(MANOVA)。表3顯示，四種解題表現類型兒童之數學能力的差異統計考驗Wilks' Λ值為 .82466，達顯著(P<.001)，即，不同解題策略類型之兒童在數學能力上有顯著差異存在。經單因子變異數分析(ONEWAY)結果，則顯示四組策略類型兒童在四項數學能力分數差異統計考驗F值(分別是，10.98; 11.81; 13.27;6.63)，亦皆達顯著(p < .001)。再分別以SCHEFFE法進行事後比較，發現類型Ⅲ、Ⅳ幾乎皆顯著高於類型Ⅰ、Ⅱ。由調查結果之分析可以發現，受試在解積木問題的不同類型的策略足以反映出其不同的數學能力，能提出兩種以上解法(多重解法)的兒童，其數學能力明顯的高於只能使用一種解法(單一解法)之兒童。

表3 四組解題表現類型兒童之數學成就分數與解題分數多變量變異數分析結果

變　項	假設SS	誤差SS	假設MS	誤差MS	F值	顯著性	事後比較
數學概念	344.09	2454.78	114.70	10.45	10.98	.000	3,4>2,1
數學計算	355.80	2360.17	118.60	10.04	11.81	.000	3,4>2,1
數學應用	609.62	3599.15	203.21	15.32	13.27	.000	3,4>2,1
解題能力	1626.10	20029.90	542.03	85.23	6.36	.000	3,4>1
Wilks' Λ值= .82466					3.87	.000	

單變量 F 考驗 自由度(3,235)

承上，四種數學能力能否有效區分單一與多重解法兩組兒童？易言之，根據前述分析，雖然單一與多重解法兒童之數學能力有高下之分，但數學能力區分這兩種解題表現類型的效力如何？值得進一步探究。

因此，繼續以四項數學能力作為區別變項，對單一解法(合併類型Ⅰ、Ⅱ)與多重解法(合併類型Ⅲ、Ⅳ)兩組進行區別分析(DISCRIMINANT ANALYSIS)。因受試分為兩組(K=2)，有四個區別變項(P=4)，故可求得一個區別函數[min(k-,p)=1](林清山，民72)。結果如表4所示，由四項區別變項所求得之區別函數Eigen值=.1986、Wilks' Λ值=.8343，達統計顯著水準(P<.001)。四項區別函數之重要性，由標準化區別係數及與區別分數之相關觀之，依序是數學應用、概念、計算及解題能力，而由四項區別變項所建立的區別函數能正確區分兩組(N=239)的比例為70.7%。

最後，解「積木問題」不同表現類型兒童正確解答「高低階單位置換」與「比例」問題的比率是否有差異？本研究將四種正確解積木問題表現類型兒童人數與高低階單位置換、比例問題答對與答錯人數，分別進行交叉分析(CROSSTABS)，結果如表5所列。

整體而言，在能正確解積木問題的兒童中，有百分之八十能正確解高低階單位置換問題，而能正確解比例問題佔百分之六十三。而四種解題表現類型在答對與答錯高低階單位置換問題及比例問題人數的比率顯然不同，就答對人數比率的高低觀之，前者依序是類型Ⅳ(89.3%)、類型Ⅲ(85.8%)、類型Ⅰ(66%)、類型Ⅱ(55.5%)；後者則是類型Ⅲ(74.2%)、類型Ⅳ(71.4%)、類型Ⅱ(44.4%)、類型Ⅰ(34%)，二者差異考驗的卡方值(18.63；28.86)皆達統計顯著水準(P<.001)。可見解「積木問題」不同表現類型兒童，正確解「高低階單位置換」與「比例」問題的比率有顯著差異存在。

表4 數學概念、計算、應用、解題能力對單一與多重解法兒童之區別分析

區別變項	標準化區別係數	與區別函數之相關	實際組別	樣本數	預測組別 單一	預測組別 多重
數學概念	.33629	.84	單一解法	68	44	24
數學計算	.31104	.86			64.7%	35.3%
數學應用	.48200	.92	多重解法	171	46	125
解題能力	.01316	.64			26.9%	73.1%

區別函數Eigen值　.19861　　正確分類比例為：70.7%
區別函數考驗Wilks' Λ值=　.8343***

*** P<.001

表5 不同解題表現類型兒童答對「單位置換」與「比例」問題的次數、百分比及卡方考驗

解題表現類型	高低階單位置換問題 答錯	答對	合計	χ^2 值	比例問題 答錯	答對	合計	χ^2 值
類型 I	17	33	50	18.63	33	17	50	28.86
	34.0%	66.0%	20.5%	***	66.0%	34.0%	20.5%	***
類型 II	8	10	18		10	8	18	
	44.4%	55.5%	7.4%		55.6%	44.4%	7.4%	
類型 III	17	103	120		31	89	120	
	14.2%	85.8%	49.2%		25.3%	74.2%	49.2%	
類型 IV	6	50	56		16	40	56	
	10.7%	89.3%	23.0%		28.6%	71.4%	23.0%	
整體	48	196	244		90	154	244	
	19.7%	80.3%	100.0%		36.9%	63.1%	100.0%	

*** p < .001

另一項衍生的問題是，就本研究所有樣本而言，比例問題的難度(.55)要高於高低階單位置換問題(.71)，然而二者解題對錯之間是否有關聯？再由表6交叉分析結果得知，二者對錯比率間的差異達顯著(P<.001)。在單位置換問題答錯者，

有八成不會解比例問題，而答對者卻有近七成會解比例問題；反之，比例問題答對者，有近九成也會答對單位置換問題，而答錯者則仍有近五成可答對單位置換問題。依此而論，兒童在解高低階單位置換問題與比例問題之間的表現有顯著的關聯。

表6 解「單位置換問題」與「比例問題」對錯人數交叉分析

		比例問題			
		答錯	答對	合 計	χ^2 值
單位置換	答錯	64	16	80	56.36
		80.0%	20.0%	28.4%	***
		50.8%	10.3%		
	答對	62	140	202	
		30.7%	69.3%	71.6%	
		49.2%	89.7%		
合 計		126	156	282	
		44.7%	55.3%	100.0%	

*** p < .001

肆、討 論

本研究為探討國小兒童數學解題策略的表現與數學能力的關係，藉由包含「積木問題」、「高低階單位置換問題」、「比例問題」的自編試題、「數學成就測驗」以及「解題行為評量表」，調查282名國小六年級學童。以下即就調查分析結果討論之。

首先，就學生解題策略類型而言，本研究有九成以上的國小六年級兒童均能正確解積木問題，其中，就受試表述解題想法與使用策略分類，可得四種解題類型。據甯自強(民81;84)的觀點，類型 I 是只能以「一個」為計數單位求解，此種

運思的特徵雖能明顯區分單位與一集聚單位(composite unit)，混合使用兩種以上的單位時不混淆各個單位的意義，可以將數個「集聚單位」與數個「1」合而為一，形成新的集聚單位，但由於只能採用部份的觀點掌握部份全體關係(即，兒童明顯的會先行估計積木每一排的數量，再重複製作若干份再求其和)，所以類型Ⅰ的表現應屬「部份全體運思」的解題策略。相對的，類型Ⅱ能以「一排」(7個)為計數單位求解，基本上，這類型的兒童已能覺察新的集聚單位(排)與全體(90個)的關係並以其做為全體的單位量，由是而可以掌握兩階層的部份全體關係(甯自強,民81)，例如，「1」與「7」以及「7」與「90」間的部份全體關係，所以類型Ⅱ的表現屬「測量運思」的解題策略。而類型Ⅲ與類型Ⅳ的表現亦應同屬「測量運思」的解題策略，所不同者在於前者解題的表現是先採「部份全體運思」再試「測量運思」；而後者則反之。據此以觀，雖然有學者(甯自強，民8×)指出測量運思形成於五年級下學期，但在本研究中，約有三成六年級兒童(包含錯誤解題)可能尚停滯在「部份全體運思」而未進入「測量運思」階段，不過，這項結果只能提供「量」的論據，仍有待未來「質」的論據提出方能確定。

其次，由兒童解題的不同策略表現與其數學能力的關聯推知，解題過程中存在「路徑差」或許與運思能力的發展先後有關，例如，解決$3\times5+3\times?=27$的問題時，有的兒童無法以「3」為單位來求解，亦就是不會以$27\div3=9$, $9-5=4$來求解；而用$27-3\times5=12$, $12\div3=4$，此乃運思發展尚停留在部份全體運思期的關係，未進入測量運思期(甯自強，民82a)。就此例而言，有時路徑差的策略，會是因「時間差」造成的。若是，本研究調查結果，三成兒童不會而七成兒童會使用測量運思策略解題，可能是運思能力發展上的時間差所致。

在多數學生能正確解積木問題且有不同的解題策略下，本研究關心的第一項問題是，兒童使用不同的解題策略是否可反映出不同的數學能力？根據分析結果，不同解題策略類型兒童在數學概念、計算、應用及解題等數學能力的表現上有顯著的差異存在。事後比較四種解題類型之間的差異，發現類型Ⅲ、Ⅳ幾乎皆顯著高於類型Ⅰ、Ⅱ，受試在解積木問題的不同類型的表現足以反映出不同的數學能力，其中又以能提出兩種以上解法(多重解法)的兒童，其數學能力明顯的高

於只能使用一種解法(單一解法)的兒童。此一結果除可反映(類型Ⅱ不計)使用測量運思策略解題兒童之數學能力優於部份全體運思策略兒童外，亦驗證國內陳美芳(民84)的研究發現，國小學生的解題歷程表現與數學學業成就有顯著正相，解題表現可以預測數學有關的能力。惟，值得注意的是，類型Ⅱ雖然為測量運思解題表現，但其數學有關的能力卻極近於類型Ⅰ，這類兒童是否已進入測量運思期，本研究因受「量」的研究限制，無法如「質」的研究般反覆推敲而確知。

本研究第二項的問題是，國小學童的數學能力究竟在解釋不同解題策略的效力如何？從前述結果得知，兒童不同解題表現在數學能力的差異主要顯現於使用單一與多重解法兩類組之間，因此，研究者乃將分析焦點置於四種數學能力能否有效區分單一與多重解法兩組兒童？之問題上。在以四項數學能力作為區別變項，對單一解法與多重解法進行區別分析的結果顯示，四項數學能力可正確區別兩類組的比例達七成以上。過去國內研究發現(林碧珍，民78)，國小學生解題策略的使用次數與學生解題能力有正相關。此由本研究使用多重解法兩組兒童，就解題能力而言，高於單一解法兒童可得印證。另，楊瑞智(民83)的研究指出，國小高年級兒童在問題的知覺、了解及表徵方面，高解題能力者傾向從問題的情境或特例中，觀察各部份間的關係且評估其可用性後，才開始作答；而低能力者傾向只知覺到單一或少數的關係。這可解釋研究中何以兒童能同時採部份全體運思與測量運思策略解題者數學能力的表現，要明顯的高於只能採一種解題策略解題者之原因。

再者，本研究第三項問題是，不同解題策略兒童在解較高運思層次問題的表現上是否不同？亦即，解「積木問題」不同表現類型兒童正確解答「高低階單位置換」與「比例」問題的比率是否有差異？經交叉分析結果顯示，能正確解積木問題的兒童，有八成能正確解高低階單位置換問題，六成能正確解比例問題。而四種解題表現類型在答對與答錯高低階單位置換問題及比例問題人數的比率顯著不同，就答對人數比率的高低觀之，前題依序是類型Ⅳ、類型Ⅲ、類型Ⅰ、類型Ⅱ；而後題則是類型Ⅲ、類型Ⅳ、類型Ⅱ、類型Ⅰ。整體而言，解「積木問題」不同表現類型兒童，在正確解「高低階單位置換」與「比例」問題的比率有顯著

差異存在。在研究者自編之問題中，比例問題的難度要高於高低階單位置換問題，而高低階置換問題難度又高於積木問題。兒童解高低階單位置換問題與比例問題之間的表現有顯著的關聯。

就兒童數學運思發展的觀點，早期Inhelder與Piaget(1958)的研究認為，比例推理是形式運思能力的試金石，兒童大約在11歲以後才逐漸發展起來。而國內研究(李惠貞，民70)亦顯示，比例推理的發展配合認知發展，要到形式運思期才發展(劉秋木，民85)。甯自強(民81)則指出兒童比例運思的發展可能遲至國中階段。關於兒童比例運思的研究，有學者(Behr, Harel, Post,與Lesh,1992)特別強調「單位型態」與「集聚單位」的重要性，認為這是聯結有理數與全數的關鍵。將單一物體當成一個單位時，這種單位稱為單項單位 (singleton unit)，而若將幾個物體或集合當成一個單位時，這種單位稱為集聚單位(composite unit)，例如五個一數便是一種集聚單位。有理數的各種涵義，如分數、商、運算子等，都可以從集聚單位的概念理解之。本研究以高低階單位置換問題，作為瞭解兒童能否具備以集聚單位的概念解題的能力，進而推論其解比例問題的能力。結果顯示，使用測量運思策略解積木問題的兒童(類型Ⅳ、Ⅲ)，有八成以上能正確解高低階單位問題，七成能正確解比例問題。正確解高低階單位置換問題的兒童，近七成也能正確解比例問題；不會解比例問題者答對與答錯單位置換問題比率約略相當。合言之，解積木問題的不同解題策略類型的兒童在解較高運思層次問題的表現顯然不同，兒童能使用測量運思策略解積木問題者，大部份因已具備以集聚單位的解題的能力，故有助於正確解比例問題的表現。

再就兒童解比例問題的表現觀之，Lamon(1993)認為兒童能解決一般的比例問題未必表示他能有比例運思的能力。甚至有研究指出，即便是成人未必都能解比例問題(Post, Harel, & Behr, 1991)。因此，本研究雖有六成以上兒童在未學過「比和比值」單元而能解比例問題，但並不足以證明這些兒童的數學概念已進入比例運思期。Lamon認為有兩種思考策略對比例推理很重要，一是關聯的思考，一是建構單位的思考。所謂關聯的思考是將問題情境中的重要特色關聯起來。例如，兩棵數五年前分別是8尺和10尺，今年則分別是14尺和16尺，哪棵樹長得比較快？

兒童能將五年前兩棵數的差距與今年的差距關聯起來思考，才有關聯思考的策略。而後者的思考策略是兒童能將問題中P/Q表示兩個量之間的關係，看成是一個單位或是一個數值，則對比例問題的解決很重要。而這兩種思考研究者單從兒童解題的列式並無法判定。一般學生解比例問題時，單位率法是最通用的策略，也是最能保證正確答案的策略(Cramer, Post, & Currier, 1993)。不過，使用單位率(unit-rate)以解決比例問題的學生往往會面臨該使用哪一種單位率當作因子，在本研究中，兒童解第三題時，答案會出現12.5公分的鐵棒重4公斤，倒底應該解釋成每公分有4÷12.5公斤重，還是每公斤有12.5÷4公分長的困擾，這與Hiebert & Lefevre(1986) 的研究發現若合符節。

綜上討論，國小兒童不同解題策略類型足以反映數學能力的差異，亦能解釋與運思發展的關聯，那麼，這對國小數學解題教學有何涵義? 一般說來，老師於解題教學上使用的教學策略不外乎下列三種：1.展示各種解題方法給學生；2.讓學生用他們最喜歡的方法或策略；3.重點放在特定問題的特別策略。由於數學課堂時間很短暫，教師通常會採用教一種策略使學生可以有機會熟練此策略；但是教科書往往是很直接地採用第三種(Sigurdson, Olson,& Mason, 1994)。因這兩種教學途徑忽略學生學習的時間差，致學生必須被動而講效率的接受數學知識。長此以往，學生喪失學習數學的信心，視解數學題為畏途，而使數學課程培養學生解題能力的目標落空。再者，傳統的紙筆評量，在標準答案只有一個的情況下，當兒童答錯時，教師無法瞭解兒童是否真的不會解題，或是尚有其他不同於標準答案的解法，卻也是具合理性的想法(黃幸美，民85)；當兒童答對時，教師亦無法瞭解兒童數學運思發展與能力的時間差，以作為進一步教學的依據。因此，未來面對「將數學視為解題」的新課程，除教科書的變革外，教師應盡量藉由佈題鼓勵學生提出各種可能的解法與表達解題的想法，並從學生解題表現的路徑差中評量運思能力的時間差，以調整教學方向，才能真正有助於發展兒童解決問題的能力。

參考文獻

朱建正(尚未出版)。國小數學課程的理論基礎。國科會86年專題研究報告。

李惠貞(民70)。國小學童比例概念的發展。省立花蓮師範專科學校學報，11,　。

吳仁俊(民85)。兒童的乘法概念研究—一個三年級的個案。國立高雄師範大學數學系碩士論文(未出版)。

吳昭容(民81)。圖示對國小學童解數學應用題之影響，載於國立台中師範學院編：八十學年度師範學院教育學術論文輯(頁 330-362)。

周台傑、范金玉(民82)。國民小學數學能力發展測驗。彰化：精華印刷企業社。

周筱亭(民84)。數學新課程的趨勢，載於省歐用生等編：國民小學新課程標準的精神與特色(頁107-135)。台灣省國民學校教師研習會。

林碧珍(民78)。國小學生數學解題的表現及其相關因素的研究。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文(未出版)。

林碧珍(民81)。國小兒童對乘除法應用問題之認知結構，載於國立台中師範學院編：八十學年度師範學院教育學術論文輯(頁 363-399)。

涂金堂(民84)。國小學生後設認知、數學焦慮與數學解題表現之相關研究。國立高雄師範大學教育學系碩士論文(未出版)。

陳美芳(民84)。「學生因素」與「題目因素」對國小高年級兒童除法應用問題解題影響之研究。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所博士論文(未出版)。

張再明(民83)。國小兒童問題結構認知能力及其相關因素之探討研究。嘉義師院學報，8，1-56。

黃幸美(民85)。數學科新課程學習評量之探討。研習資訊，5(13)，47-51。

楊瑞智(民83)。國小五、六年級不同能力學童數學解題的思考過程。國立台灣師範大學科學教育研究所博士論文(未出版)。

劉好、許天維(民84)。 數學科課程教材教法基本理念，載於周筱亭主編：八十三學年度國民小學新課程數學科研討會論文暨會議實錄專輯(頁.11-28)。 台灣省國民教師研習會。

劉秋木(民78)。 數學解題行為評量表編製報告。 七十七年度國科會專題研究報告(編號：NSC77-0111-S026-01A)。

劉秋木(民85)。 國小數學科教學研究。 台北：五南。

劉錫麒(民78)。 國小高年級學生數學解題歷程及其相關因素的研究。 花蓮師院學報，3，23-92。

劉錫麒(民80)。 合作反省思考的數學解題教學模式及其實徵研究。 國立台灣師範大學教育研究所博士論文(未出版)。

甯自強(民81)。 兒童的「整數詞」意義。 論文發表於第八屆中華民國科學教育年會，高雄師範大學十二月五日。

甯自強(民82a)。 單位量的變換(一)~正整數乘除法運思的啟蒙。教師之友，34(1)，27-34。

甯自強(民82b)。 國小數學科新課程的精神及改革的動向—由建構主義的觀點來看。 科學教育學刊，1(1)，101-108。

甯自強(民84)。 單位量的變換(二)~正整數乘除法運思的融合。教師之友，34(1)，27-34。

譚寧君(民79)。 中美國小六年級兒童數學態度與解題能力差異之調查研究。 台北師院學報，3， 289-324。

Behr, Harel, Post, & Lesh(1992). Rational number, ratio, and pro-potion. In Grouws, D. A.(ed.): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 296-333). New York : MacMillan Publishing Company.

Confrey, J. (1991). Learning to listen: A student's understanding of powers of ten. In E. von Glasersfeld (Ed): Radical constructivism in mathematics education (pp. 111-138). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. Owens (Ed): Research ideas for the classroom middle grades mathematics (pp 137-178). New York: MacMillan Publishing Company.

Hiebert, J, & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics：An introductionary analysis. In J. Hiebert(Ed.), Conceptual and procedural knowledge：The case for mathematics (pp. 1-27). Hillsdale, NJ：Erlbaum.

Lester, F. K.(1980). Research on mathematical problem solving. In R. J. Shumway(Ed.): Research in Methematics Education(pp.286-323). Reston, VA:NCTM.

National Council of Supervisors of Mathematics (1989). Essential mathematics for the twenty-first century: The position of the National Council of Supervisors of Mathematics. Arithmetic Teacher, 37(1), 44-46.

Post, T. R., Harel, G., Behr, M. J,& Lesh, R.(1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon(Eds.) Intergrating research on teaching and learning mathematics(pp. 177-198) New York：State University of New York Press.

Sanez-Ludlow, A.(1994). Michael's fraction schemes. Journal for Research in Mathematics Education, 35(1), 50-85.

Sigurdson, S. E., Olson, A. T., & Mason, P. (1994). Problem solving and mathematics learning. Journal of mathematical behavior, 13, pp.361-388.

Strigler, J. W., Lee, S. Y., & Stevenson, H. W.(1988). Mathematical Knowlege of Japanese, Chinese, and American Elementary School Children. The National Council of Teachers of Mathematics, INC.

The Relations Between Problem-Solving Strategies and Math Abilities of Elementary School Students
- An Exploration in Solving "Blocks Problem"

Li-hsiun Chou , Shiang-tung Liu
National Chia-yi Teachers College

Abstract

The purpose of this study was to explore the relations between mathematics problem-solving strategies and math abilities of elementary school students. Instruments used for this study included Mathematics Achievement Test, The Evaluation of Mathematical Problem-solving Behavior, and three self-constructed mathematics itemes, i. e., "blocks problem", "replacement between high and low level unit problem" and "proportion problem". All these instruments were administrated among 282 sixth-grade students selected from the elementary schools in Chiayi area. The results show that: (1) those ones among correct answers on blocks problem reveal four types of problem-solving strategies; (2) there is significant difference in math abilities among four types of strategies; (3) it is effective to discrminate single and multiple strategies base on children's math abilities; and (4) there are significant relations between various types of strategies and the abilities in solving higher level problem. According to the results, some applications to math problem-solving instruction in elementary schools are also discussed.