國民教育研究學報，第4期：231～264
民87年，國立嘉義師院國民教育研究所

顏淑茹的數概念

甯　自　強
嘉義師範學院數理教育學系

摘　要

以根本建構主義爲知識論基礎，皮亞傑的基模理論爲心理學的基礎，本文假設數概念爲集聚單位，並區分低年級兒童的數概念類型爲起始數概念及內嵌數概念兩種。透過教學晤談法的實施，一位七歲一年級的兒童顏淑茹對有關數概念功能問題的反應資料被加以蒐集，並加以概念分析。分析的結果顯示其數概念爲起始數概念。至於個案的起始數概念的特質，則以對17個原案的詳細的闡釋加以突顯。

本文共分四節。第一節敘述進行兒童數概念研究的背景及其重要性。第二節則分析數概念的本質以及說明低年級階段的兩種數概念類型及其性質。第三節敘述進行數概念類型研究時蒐集及處理資料的方法。第四節報導顏淑茹的數概念類型及其性質。

壹、背景及重要性

在國小數學教育階段中，有關數概念的學習是主要的課程重點。即以我國國民小學數學課程來說，有關數概念的學習即佔三分之二左右，其他世界各國的小學數學課程，在有關數概念的教材份量上，也不遑多讓。事實上，世界各地在幼稚園階段即開始引入數概念啓蒙的教材。倘使課程研發的目的在於能促使兒童學得所編製的有關教

材，在課程編製時，對於兒童可能達成的學習成果，則應當有所預期。易言之，在進行兒童數學教育時，對數概念啓蒙教材的側重必須先對兒童學習數概念的成果－－即兒童數概念的類型，有所預期，始能在編製有關的教材時，可以妥當的選擇與組織。

然而，臺灣過去對兒童「數概念」研究上，一向缺乏對兒童「數概念」的特質加以描述；即便有所描述，若非僅限於描述兒童的學習成果，亦多以研究者預先假設的概念來規範（即描述成人的數概念），而非由兒童有關「數概念」的全盤表現特質加以抽象。如果兒童的「數概念」是發展的，他們的數概念依其發展過程，必然迴異於成人的數概念。是故，如果兒童的「數概念」有其類型，是項類型理應源自兒童在各階段對有關數概念問題的反應記錄，而非研究者預先假設的概念架構的修正。

中外已有有關對兒童「數概念」發展的研究，除去少數（例如，Steffe, et al., 1983, 1988)的例外，大多數將所謂的「數概念」視爲當然而且具有一成不變的意義。如果「數概念」之類的數學知識來自於解決有關於數量問題的經驗，是項知識的獲得理應歷經「經驗」、「察覺」以及「瞭解」的各階段（甯自強，1993a），而非一時之間驟然「從無變有」。即，兒童首需「經驗」數概念活動的顯著成分，最後「瞭解」何以是項「數概念」活動得以發揮功能的「所以然」。是以，意圖研究兒童的「數概念」發展，不但需揚棄所謂「數的意義一成不變的」底成見，更需能區分同一「數概念」的不同心理成就。

特別的，「發展」一辭，從宏觀的著眼點來看，「時間差」是不可忽視的重要因素，但從微觀的著眼點而言，「路徑差」亦爲一顯著的要素。已有的心理成就經歷了長期的人際交流，可使相同的語辭在使用上的「語意」更具「相容性」，但是「語意」上的相容未必蘊涵著心理成就上的「相同」。同一「數辭」可以誘發不同的「數概念」，研究者應避免由於不同「數概念」的「相容功能」，遽而結論出相同的「數概念」。是以，意圖研究兒童的「數概念」發展，實不可忽視兒童對數辭的「語意差」以及「語意演化路徑差」。

因而，欲研究兒童「數概念」的發展，不但需根據兒童有關「數概念」問題的反應資料，歸納描述出兒童在不同時段的不同「數概念」的特質，更需累積是項資料用以刻劃出兒童不同「數概念」的「演化途徑」。本文的目的在依據一位兒童對有關

「數概念」問題的反應底資料，描述出他的「數概念」的特質模型。具體言之，在於說明他對「數辭」所賦與的意義類型以及不同類型的功能。

本文涉及底兒童的「數概念」模型與研究者所建構的兒童「數概念」模型必有不可避免的不同。在此，所謂的模型是指一個由研究者就其認爲有關聯性的一組經驗中得以建構出的概念。模型可以被更改，如果其解釋威力已不足以說明在這模型原本使用的情境中所產的新例子。具體言之，本文企圖描述出兒童的「數概念」的特質，而是項描述的重要性，一方面爲研究兒童「數概念」發展不可或缺的基礎；另方面則爲研究兒童「數學概念」發展不可或缺的基礎，蓋「數概念」允稱爲「數學知識」之濫殤。

貳、數概念本質及類型

本研究由根本建構主義的知識論假設(von Glasersfeld, 1995)出發，以皮亞傑的基模論（Piaget, 1970）爲心理學假設，探討兒童「數概念」的可能類型。即，探討兒童對整數詞所賦與的意義，而該項意義取決於兒童在解決問題的情境中，所使用的基模而言（甯自強，1993b）。然而，兒童僅管在解決問題的情境中，使用了特定的基模，而此基模也係因著整數詞所激發的，並不意味著兒童的所用的基模便可以被稱之爲「數概念」。舉例來說，在皮亞傑的大著《兒童的數概念》（Piaget, 1965）一書便充斥著數的前置概念（pre-concept）的例子。事實上，皮亞傑對於數概念的擁有，也特別強調所謂運思顯著（operationally significant）的條件，以期能與數的前置概念有所區分。

一、本質：

對數加以定義的例子有許多。例如，高斯（1800/1929）對於何謂「數」，就給了如下的一個界定：

> 數是一個指標，此指標是用來指示，爲了獲得一個與一被界定量相等的量起見，一個已知量（單位量），或是此單位的一個被等分割部份，所需被重複累積的次

數；這個次數則被用來指示被界定量。

高斯的看法除了說明數是用來界定一量與單位量間的關係外，特別的，則指出了界定的方法端視被界定量可否由單位量利用重複累積的方法得以複製而成。可惜的是，高斯在界定中利用「次數」來說明「數」，不免陷入循環界定的問題。此一循環界定的問題，究竟是否意指數爲不可分析的運作整體（operatory whole, Piaget, 1965），則不得而知。所謂不可分析的整體，是指一整體雖由部份聯合構成，但構成的關係，雖在構成的部份均已成形下，認知個體仍然無法獲得的，構成的關係是一種質變。易言之，雖有內容(content)的充斥，但仍未有形式(form)的獲得。

羅素(1903)則認爲：「由數學的觀點來看，數僅不過是相似的類所成的類。」換句話說，羅素主張，比如說，3是由3個桌子，3個人，3個椅子……等物件的類的抽象而得的。羅素的說法倍受皮亞傑的攻擊（Piaget, 1965）。皮亞傑經由對兒童的觀察指出，基數概念與序列概念是同時產生的。數概念一經成形，一方面是序列，另方面則同時爲類。數是由次序與類同時融合而成的東西。儘管如此，羅素所指的抽象，或是皮亞傑所指的融合，究指何物，仍然有待進一步探討。

Davydov(1982)則指出：「數概念是指某量，及該量中用作測量單位的一部份，經由測量活動所建立的一組多重（multiple）的關係。」Davydov的主張基本上和高斯類似，其差別之處，在於Davydov強調高斯的次數是由測量活動的一個產品。與羅素的抽象相較之下，此抽象可能和Davydov的測量活動有關。Piaget的融合，可能即爲藉由測量活動所達成的，即在測量活動中融合了類與序列。如果這樣的猜測具有可能性的話，所謂的測量單位，或是高斯的單位量，或是羅素或皮亞傑之所以成類的標準，仍然無法視爲當然，有待進一步的說明。

認爲單位（unit）的概念在數概念中扮演重要的角色，由來已久。例如，歐基理德（Euclid, 1926）則說過：「所謂的單位是指存有而被稱爲一的事物，而數則是由單位所構成的多數。」當然，歐基理德的說法，並未脫離前面各家的主張--數是指由單位所構成的多數，或是單位量與被數界定的量間的多重關係。

事實上，有關單位觀點使用上，不僅限於單位量，連數的本身也被看成一個單位。例如，杜威（1895）認爲：「在簡單的辨認，比如，三個事物爲3的時候，必

需包含下面的運思：將三件被辨認的事物當成一個連通的整體或是群--即，辨識出三個事物都是個別的，辨識出一個由三個個體所構成的全體單位。」把一個異於 1 的數看成一個新的單位是勢在必行的，因爲數常被當成事物進一步的加以運作，如數的運算等即爲實例。此外杜威的說法的貢獻--數與 1 間的部份全體關係，也是值得加以特別彰顯的。這種說法雖然在皮亞傑的論述中，亦有所提及，事實上在歐基理德的定義中的「構成」一詞即已蘊涵其中。易言之，數是由個別的 1 部份所構成的全體。必須說明的是，雖然Davydov提出了測量活動的背景；皮亞傑提出了所謂次序與類的融合；羅素提出了類的抽象；而且杜威也說明了數是理性的過程（rational process）；但究竟單位係指何物的抽象，仍未周全。

對於此點，Steffe等人（1983）則認爲：「1 是內蘊化的數數動作，而數則爲由集合 1 所構成的集聚單位(composite unit)。」數數動作事實上，則爲測量離散集合活動的必備條件。由此可見Steffe等人的意見，確與Davydov不謀而合。必需指出的是，除了數數的動作可抽象成 1 之外；依據杜威的說法，集合 1 以成爲集聚單位的過程必須也經過同樣的抽象--即如同歐基理德所說的，把 3 個 1 ，看成 1 個 3 的抽象活動。當然Steffe等人對數概念的界定，也引起了另一個問題--數數與數概念間的關係。

數數活動的功能在於確定一被測量的量與測量單位量間的關係，即確定被測量量的數值。一般而言，多半研究者認爲早期整數概念的發展與數數活動間的關係非常密切（Gelman & Gallistel, 1978; Piaget, 1965; Freudenthal, 1983; Steffe, et al, 1983）。從所謂成功的數數經驗的界定方面來看，Gelman和Gallistel認爲必需滿足五個性質：（1）一對一性質--即每一被計數物必需對應一個而且只能有一個數詞；（2）穩定次序性質--即個別數詞在數數序列中出現的次序必需是穩定不變的；（3）基數性質--即數數活動最後活動最後出現的數詞必需被指定成代表被計數集合的數值；（4）抽象性質--物件所成的任何類均包含一可被計數的集合；（5）次序無關性質--被計數集中的任意物件在被計數時的被使用次序與數數活動或是該被計數集的數值無關。而Steffe等人，則認爲數數活動包含了三個主要的活動：（1）能口語地(或默默地)唸出一序列的標準數詞；（2）能製作一群被計數單位(無論是感官的或其

他)以進行計數；（3）能將（1）、（2）兩項的活動連合在一起，使得一個數詞能與一個被計數單位加以對應。

值得注意的是，Steffe等人的第二項成份，包含了Gelman和Gallistel的（4）和（5）兩項性質。按，說到一群單位所構成的集合，即先行假設對該集合進行了抽象，而且被計數物的使用次序也因抽象而失去了。這項說明與Gelman和Gallistel在其大作中的結論--「抽象性質的達成出現得很早（1978, p.243）」--是相當一致的。Steffe等人所主張的(1)項活動則與Gelman和Gallistel的穩定性質類似。其所不同的是Steffe等人指向必需具備的能力，而Gelman和Gallistel的（1）和（3）性質則指向該項能力的性質（此之所以原文principle譯成性質）。至於Gelman和Gallistel的性質（3），並未包含在Steffe等人的第（3）項中，此中之差異則在前者所強調的是「成功」；而後者，則強調所需進行的「同步」活動而已。

必需注意的是Steffe等人在第（2）項中對被計數單位的強調；此項強調與Gelman和Gallistel有所不同。在Gelman和Gallistel視被計數單位爲當然的情形下，Steffe等人甚至以心理學上的成就層次對被計數單位進一步的區分爲：（1）感官單位--指視覺的，聽覺的或是觸覺上的信號而言；（2）圖像單位--指已見過的物件的心像而言；（3）動作單位--指由具體動作所產生的信號而言；（4）口語單位--指在計數時所產生的數詞信號，被用來計數；（5）抽象單位--指1的抽象概念而言；--等五種被計數單位。抽象單位是指不需再表現（甯自強，1993a）即可被計數的單位而言的。

Steffe等人在心理學上區分1的概念及其前置概念的說明，引致另一問題--數的概念與數的前置概念究竟如何區分？特別的，在杜威等人對一個數也強調必需是一個單位的情形下，此問題便特別值得探究。von Glasersfeld氏（1981）對於此一問題，曾從注意力脈動（attentional pulse）模型觀點加以探討。對於物件的叢集概念，他作了如下的幾種區分：（1）類（plurality）--指一群無界的且共享特定性質的感官物件序列；（2）集（collection）--指具體有界的類；（3）組（lot）--指圖像的集類型；（4）算術組（arithmetic lot）--指由圖像單位構成的組；（5）數

--指抽象的算術組類型。von Glasersfeld氏所作的區分是依據心理成就所作的；然而特需說明的是，von Glasersfeld所描述的數的數值均未被確定；數值的確定需得通過數數的活動，這種模型下的數，即爲集聚單位。

單純的一個集聚單位只不過是由數數動作1所構成的新單位。探討學前的兒童數概念，只需說明是否具備集聚單位的性質便已足夠。但進入小學之後，明顯的由於記數系統的使用，單純的集聚單位概念已經不足說明低年級兒童的數概念本質。估且不論現今在小學通用的印度－阿拉伯記數系統的文化史根據，記數系統的系統化預先假設了數概念的系統化。易言之，記數系統的結構預設了數概念間的組織活動(甯自強，1995)。

衆所周知，印－阿記數系統是十進的。易言之，在原本的數概念是以1爲單位的結構這種情形下，兒童若欲同化印－阿記數系統的結構，至少得多考慮另一個單位--「十」。甚且需能同時使用這兩個(或更多的)單位，來組織概念，並在使用的過程中不能混淆。有關以1爲單位的數概念研究，如前所述，研究頗多；然而，正同Fuson（1992）所招認的--截至目前爲止，涉及多單位的系統方面的研究，甚爲少見（p.268）。

除了位値所蘊涵的區分組成數概念的單位意義外，相鄰兩個位置間的「逢十進一」的十進概念，事實上是任相鄰兩階單位間的比値，是個組成數概念的所有兩相鄰單位間的等比例關係。如果Inhelder & Piaget（1958）所主張的形式運思期才能理解等比例關係沒有問題的話，十進數的概念在低年級中則不可能。易言之，對多單位系統的數概念方面的研究是荒蕪的，但卻顯著的（Hiebert & Behr, 1988）。然而多單位系統的使用，勢必需對單位間的關係加以考慮，特別的是新單位的如何能獨立於原有的單位〝1〞地被使用來確定數値。

成爲新的單位必須具備四項條件。首先，要成爲一個新的單位，預先假設了存有，而且此單位必須與原單位有所不同。存有則假設了其可重製（reproducable）。

要成爲一個新的單位，除了需有一個與原單位不同的物件的存有之外，這個物件所成的量還必須是可以重複的。可以重製的和可以重複的量的不同在於前者是不可計

數的（countable），而後者則可以被計數的。可重複的單位是不同時空的可重製的單位的抽象；換句話說，不同情境下重製的新單位被進行比較後歸納成為一類，成為等價類的類型，稱之為可重複（repeatable）的單位。特別的是，「可重複的」是指可一而再，再而三的；易言之，可重製的與可重複的之間，尚有可再製的（one more）中介過程。

既然是新的可以重複的單位，新的單位的重複應當不能和舊的單位有所混淆。然而，原有的單位本來就可用來製作新的單位，所以建構出新的單位不會和原有的單位混淆，此時稱之為可重複的單位結構（iterating unit）。

還有，既然是新的單位，亦即其可以以此新單位來製作另一單位。換句話說，新的單位也應蘊涵著新單位與被製作者間的部份全體關係的掌握。如果建構出的新的單位也蘊涵著其與被製作量間的部份全體關係，此時稱其為測量單位（mesurement unit），因為新的單位則可用來測量被指示的單位。

新單位成為可重複的單位結構或是測量單位的兩種情形可以用可迭次（iterable）來加以整合。所謂的可迭次的，是指由一單位去構成另一單位，作為構成元素的單位與作為構成產品的單位，兩者之間有明顯的部份全體關係。新單位是可重複的單位結構時，則構成新單位的原單位是可迭次的；當新單位本身是測量單位時，新單位自身是可迭次的。數概念在結構上考慮新單位時，原已假設了原單位 1，是以在可迭次上的考量是兩個層次的。

綜上所述，由心理學的觀點來看，數概念是由 1 概念的聯合再加以聚合而成的集聚單位；而 1 概念則由測量活動中的行為，或是數數動作的內蘊化所得的。由於是內蘊化的成果，所以數必需是運作顯著的。數概念用在實際中，是單位量與被界定量的關係；此一關係多半發生在測量活動中，此一關係建立單位量部份與被界定量全體可重複累積的多重關係上。特別的，由於記數系統的使用，對數概念的本質探討尚需加入其結構方面的探索。由於低年級兒童的缺乏等比例思考，多單位系統的建立應是探索兒童數結構概念上的主要問題。可重製，可再製，可重複，以及可迭次等四種單位性質，被提出來說明多單位系統中，成為新單位的條件。

二、低年級階段的數概念類型：

數概念類型的種類，在低年級階段，可以分成兩類：起始數概念與內嵌數概念（甯自強，1994）。茲依其順序次第說明於後：

必需先說明的是各類型數概念間的關係，同一運思活動由於其使用時疏離感官活動材料（sensori motor materials）的遠近，可以區分爲（1）感官活動期，（2）表徵活動期，與（3）抽象運思期三種概念層次。在感官活動期解決問題的兒童，於缺乏感官活動材料的供給下，無法完成解題。在缺乏感官活動材料的供給下，能自行以象徵方式供應活動活動所需之材料並同時解題的兒童，其運思活動則處於表徵活動期。處於表徵活動期的兒童能成功的進行解題：然而卻只能正確的實施活動，而無法說明活動的結構，易言之，處於表徵活動期的兒童能知其然，但無法知其所以然。在抽象運思期的兒童解決問題時，不但能預先規範解題的方式或策略及預測結果，而且能說明其解題活動構造，並利用解題的結果作進一步的運思。因爲同一運思活動其功能性的相同以及側重於『瞭解』的層面，『整數詞』的意義由於同一運思活動所涉及感官活動材料遠離程度上所造成的差異，並不是模型的說明重點。特別在此區分三個層次的運思活動，意在先行指出模型中論及的不同運思活動，是指它們在抽象運思期的概念層次，而非感官活動期或是象徵活期的層次。

此外，每一個概念類型階段中，下一概念類型階段的感官活動或是表徵活動期表現已經出現；唯一的差別是，各階段的數概念類型是兒童同化情境的結果；而各階段的次階段的數概念類型則以表徵或是具體實施的方式表現。

（一）起始數概念

此一數概念類型的意義爲，與標準數詞序列中，一段由1開始的有限數詞序列，一一對應的一個以『1』爲元素的群體，或是集聚『1』所成的集聚單位（composite unit, Steffe, et al, 1983, 1988），而且此集聚單位的數值則爲有限數詞序列的最後一項。此種類型的數概念具備了約定成俗的正整數概念意義。如果給兒童一堆花片並要求她找出『ㄨˇ』個花片來，她不但能正確的取出所需的量，也能說明所謂的『ㄨˇ』，是所取出花片的全體。不論情境所涉及的量的種類，兒童大多以『合起來』來描述她所參考的量。『ㄨˇ』是5個1合起來的意思。當然，此一數概念類型可以通過皮亞傑的「數保留概念」檢測。

從起始數概念來看，整數詞『ㄨˇ』指示的是一集聚單位量與單位1間的關係，而此關係是透過數數活動「ㄧ、ㄦˋ、ㄙㄢ、ㄙˋ、ㄨˇ」來達成的。「ㄧ、ㄦˋ、ㄙㄢ、ㄙˋ、ㄨˇ」是一序列的數1的活動，區分『ㄨˇ』是第五和『ㄨˇ』是五個一，無法僅用序列地數1活動加以分別：『合起來』這個動詞才是『ㄨˇ』的前置概念與起始數概念兩種意義的主要分界點。將構成事物的元素合成為一事物的能力或運思，稱之為『合成運思』（uniting operations），遠在兒童三歲以前便已經出現，此由兒童能自行建構物的恆有概念即可印證。運用合成運思於量的情境中以建構數的概念，則是兒童首次使用合成運思於與整數有關的情境中。合成運思將抽象的計數動作（counting acts）合成為一集聚單位。由是，兒童具備了數保留概念。

具備起始數概念的兒童，在進行數的合成、分解時，序列性的使用合成運思來進行解題活動。序列性的合成運思（sequential uniting operations, Steffe et al, 1988）是指兒童依數詞指示的量依序全盤表現後，再進行量的分解與合成，並對分解或是合成的結果重新合成加以數值化。在這種運思時期，每一個數詞所代表的數都是獨立的。

序列性的合成運思應用在減法情境時，數數的活動都是由1開始。例如：解決8－5＝？時，兒童先做出8的表徵量來，然後在8的表徵量中利用由1數起的方式做出5的表徵量，再把5的表徵量去除後，由1數起來確定剩餘的量的數值。

在處理比較的問題時，具備起始數概念的兒童，也同樣地使用序列性的合成運思，序列性的合成運思在應用在比較的情境中時，必需將所有的被比較量都表徵出來後，才能透過一對一的比較活動進行比較。由於比較多的多的部份事物可以透過對應後，未被對應過的事物的集聚來獲得，無需將較少的量內涵於較多的量中，所以兒童可以以序列性合成運思來解決『比較多，多多少？』的問題。然而，在處理『比較少，少多少？』的問題上，透過一對一的對應方法，兒童可以判斷何者較少，但是由於『少多少』必需將較少的量內嵌於較多的量中，才能決定；而此種內嵌所蘊涵的數與數間的關係，超出了序列性運思的功能。是故，兒童無法依據序列性運思來解決『少多少』的問題。特需注意的是，解決比較、合成、分解等類的問題，兒童只是序

列地合成 1 成一集聚單位，或散開集聚單位成 1 ，合、分、比活動是作用在 1 的群體上，而不是在數上。所以兒童對兩數的比較，僅能比較出其中含 1 的多少，而不是兩數的大小。

僅具備起始數概念的兒童，在處理單位數超過 3 個以上的單位量轉換問題（甯自強，1994）會有困難。例如， 4 排積木，每排 3 個，合起來會有幾個？如前所述，兒童對數的運作主要是透過合成運思的序列性使用。因此，在再表現 4 排 3 個積木時，若是情境中未曾供給具體物以被表徵時，兒童最多以雙手表現 2 排，再利用心像將第 3 排表現於外，無法掌握必須先被再表現後才能以計數的第4排。

（二）內嵌數

此一類型的數概念型式意義為：標準數詞序列中，一段非由 1 開始的連續有限數列，所一一對應的一個以「1」為元素的集聚單位，而此集聚單位的數值為有限數列的項數。被同化成內嵌數的『ㄨˇ』是一個『5』。當『ㄨˇ』是 1 個『5』時，整數詞『ㄨˇ』所指示的也是一個集聚單位；與『ㄨˇ』是 5 個『1』(起始數概念)的不同之處則在於：前者以整數群體為觀點，而後者則側重於群體中的元素。例如，當要求兒童回答將 5 個花片和 3 個花片合置一處的結果時，將『ㄨˇ』看成 5 個 1 的人，會序列性地（sequentially）分別將 5 個 1 和 3 個 1 再表現（re-present）出來後，再重新的合成 8 個 1 ；而將『ㄨˇ』看成 1 個 5 的人，則累進性地（progressively）以 5 為起點，逐次的添加 3 個 1 ，合成 1 個 8 。『ㄨˇ』在後者，不但是數詞序列「一、ㄦˋ、ㄙㄢ、ㄙˋ、ㄨˇ」中的一份子，也同時代表整段的數詞序列「一、ㄦˋ、ㄙㄢ、ㄙˋ、ㄨˇ」。如同 3 一樣，更可以是非由 1 開始的一段有 3 個數詞數列。

累進性的合成運思（progressive uniting operations）是以合成運思的成品--集聚單位--為起點，進一步的累加更多個『1』以形成另一個新的集聚單位。舊的集聚單位『內嵌於』（embedded）新的集聚單位之中。這種內嵌的關係是兒童得以在加法問題以『往上數』（counting up）的方式，或是在減法問題以『往下數』（counting down）的方式，進行解題的主要依據；也是兒童能瞭解比較性問題中，「少多少」問題的語意的根本。從整數概念的觀點來看，合成運思帶給了『整數

詞』有關基數（cardinal）的意義，而累進性的合成運思帶給了『整數詞』有關序數(ordinal)的語意。

特需說明的是，內嵌數概念允許了新單位量的可被計數，可被再製的以及可被重複的三項性質的逐一出現。以『10』爲例，擴展至可以以任何數詞爲起點的１０個數詞均稱爲『10』，而不僅限於是由１數到１０的起始數詞段落的『10』，稱之爲『又10』（ten more）。『又10』是一個向量，與需由１數到１０的起始數詞序列段落的『10』相比較，『又10』是『10』的再次抽象，此次抽象把感官活動材料--由一到十的數詞序列段落--給進一步的推遠了。合成運思以『10』爲圖像型的素材（figurative materials）加以抽象，把抽象而得的計數動作合而爲一成爲運思型概念（operative concept）--『又10』。

『10』的意義擴展至其可以被一再重複的複製時，這種１０稱爲『可重複的10』（repeatable ten）。『可重複的10』是不同時空的『又10』的抽象；換句話說，不同情境下複製的『又10』被進行比較後歸納成爲一類，成爲等價的『又10』類型，稱之爲『可重複的10』。顯然的合成運思又一次的使用來製作『可重複的10』。和由『10』合成『又10』來比較，合成『又10』釋放了『10』對數詞序列的依賴；而合成『可重複的10』則建構了『又10』的類。由於成類的關係，不同的『又10』才擁有出現於同一時空的可能性。有了『可重複的10』，『10』才可能成爲集聚單位的構成元素。

『可重複的10』是可以被計數的『10』。經由以『10』爲被計數對象的數數活動，就可以決定一個集聚單位中含有幾個10。因此，兒童開始可以理解，比如說８７不但代表著８７個１，同時也是８個１０又７個１。然而，由於『可重複的10』與『1』的關係僅僅是後者內嵌於前者，計數『1』和計數『10』的同時進行，往往會導致在重複製作『10』的集聚單位的過程中，失去集聚單位『10』的數値。要保有集聚單位『10』的數値，代表著對『10』與『1』的部份－全體關係需要有相當的掌握。然而，到目前爲止，『1』僅僅是內嵌於『10』之中；亦即，『1』尙無法被當作獨立於它的全體〝『10』〞的一個部份單位被加以運作而不影響『10』的運作。移動『1』勢必毀去『10』的緣故，使得計數者無法在同時運作『10』和『1』的同時，保

住集聚單位『10』，或是『可重複的10』的數值。爲了區分可以重複的『10』和可以重複的『1』，前者稱爲高階單位，後者稱爲低階單位。

數概念類型是內嵌數時，高低階單位間的部份全體關係是隱約的(implicit)。例如，當『ㄨ∨』僅是可以重複製作的『5』時，兩階單位的混合使用，往往使得『5』失去其『群體』的特性。舉例來說，問兒童 9 隻手有多少手指頭，兒童可以答出 45；再加上 4 隻手呢？65！如果移去其中 3 隻手？"62！"兒童會混淆一隻手與一根手指頭之間的差異主要是因爲她無法掌握 1 個『5』與 1 個『1』間的「部份－全體關係」。而累進性合成運思所蘊涵的內嵌關係只是隱約的「部份－全體關係」；一但移去部份，即會喪失全體的「部份－全體關係」。

累進性的合成運思在應用在加法情境時，數數的活動開始出現往上數的活動。例如：解決5＋3＝?時，兒童直接以 5 爲基礎，依數詞序列多數 3 個數詞，而得到 8 作爲答案。 5 就像一個雪球的核心，多滾了 3 個一而形成了 8 。 5 內嵌在 8 之中，而內嵌的關係源自於累進性的合成 1 。

累進性的合成運思應用在取走型減法的情境時，數數活動開始出現往下數的活動。例如：解決8－5＝?時，兒童直接以8爲基礎，依數詞序列倒數 5 個數詞，而得到 3 作答案。 8 就像一個雪球，藉著倒數把由雪球核心多滾出的 5 個 1 去掉，找出雪球的核心 3 來。 3 內嵌於 8 之中，內嵌的關係源自於累進性的合成 1 ，藉著倒數去除合成，尋回原來被內嵌的數值。

累進性的合成運思在應用在比較型的減法情境中時，不但可以解決『比較多，多多少？』的問題，也可以處理『比較少，少多少？』的問題。由於累性將較小的數內嵌於較大的數中，所以解決『少多少』問題所需的將較少的量內嵌於較多的量，是可以利用累進性合成運思加以理解的。

具備內嵌數概念的兒童，由於經驗的累積，逐漸的開始以兩階單位的並用解決加、減法問題。以兩位數的加法而言，隨著『10』的可重複的出現，便可開始「10」單位與「1」單位併用解題。然而，由於尙未具備明顯的部份全體關係，所以容易出現無法掌握「10」單位的數値情形。

擁有內嵌數概念的兒童，在解決單位量轉換方面的問題方面，受限於高階單位的

品質，兒童雖能夠理解如，4個3的意義，並且利用累進性合成運思求出12爲其數值，但是，由於『3』易於符號操作過程中與『1』混淆，所以重複『3』的時候，偶而會失去『3』的數值，而把『3』當成『1』而不自覺。解決5×3＋4×3的問題時，兒童先求出5×3的結果再逐步的累加3個4；解決3×5＋3×4時也使用同樣的策略，並非利用9個3來求解的。至於在比較5×3和3×5時，兒童則認爲他們的相等純屬巧合。

至於在累進性合成運思時期的除法運作方面，諸如12÷3＝？，它的意義當是說『利用12個1可以做幾個3？』；而不是說：『12中間包含了幾個3？』。當第一個『3』被造出時，『12』已經不再存在，而只剩下了一個『3』和一個『9』。內嵌式的部份被包含於全體的關係表示，一旦部份被從全體中移去，則全體已經被毀壞而不復存有了。由12製造出來的『3』是無法與『12』並存的。所以12÷3的意義在累進性合成運思時期，並不是包含除的意義。特別還得說明的是，在累進性合成運思時期的除法並不代表『截割』的活動。一般而言，所謂的『截割』是指自一線型的全體的一端開始，向另一端的方向，藉由撕裂的方式，製取包含起點端點的一部份的活動。當『12』被看成12個『1』來做『3』的時候，『3』是聚合『1』的集聚單位，而不是獨立於『12』的部份，所以嚴格的來說，此時的除法並不是截割活動，而是利用較大的集聚單位的元素製作較小且等價的集聚單位的活動；換句話說，此時的除法可看成連減的活動，但是減數仍然是不是被減數的明顯（explicit）部份。至於在等分除的方面，兒童則傾向於以一輪每人各1的方式，將等分除情境，同化成包含除情境。

參、方　　法

教學晤談法（teaching interview, Ning,1992）是用來蒐集兒童的數概念行爲資料的。當教學晤談法進行時，研究者首先向兒童提出問題並要求兒童加以解決；其次，研究者以兒童的表現的基礎提出進一步的問題，用以釐清兒童的解題方式及相關的意圖。這種研究者與兒童間彼此溝通的互動，則持續至研究者提出其它問題或訪

談時間終了爲止。教學晤談的全部過程均將予以錄影，作爲資料分析的資源。

教學晤談法其不同於臨床晤談法的主要之處在於，當研究者察覺兒童確實無法解決研究者提出的問題時，研究者會適當地協助兒童，以免兒童遭遇挫折，並在事後適當地剔除兒童在類似問題上的成功表現，除非研究者有充份的證據使其相信兒童在類似問題上的成功表現並非基於研究者的教學干擾。教學晤談法其不同於教學實驗法的主要之處在於，研究者的目的在於瞭解兒童解決問題的方式，而非在於瞭解操弄不同的情境變因後兒童的知識模型可能產生的變化。

基於本研究的目的爲蒐集兒童的對數詞所賦予的意義類型以及類型的功能，教學晤談中使用的一組問題則是與數概念的功能有關的。此組問題爲由「數概念理論模型」所發展之關鍵性問題，對詳細內容有興趣的讀者，請自行參閱有關的研究報告（甯自強，1994），此處不再贅述。

1993年上下兩學期，嘉義縣一個勇類國小的一年級兒童顏淑茹（7歲，女）被選出參與教學晤談，以瞭解其數概念。他前後共參加10次的訪談（每次20~40分鐘）。訪談過程中，研究者在不影響對其數概念類型的推估下，刻意的增減訪談的範圍；一方面減少參與者的挫折，另方面避免參與者覺得枯燥乏味。由於訪談的房間位在馬路旁邊，常有車輛經過，有時遂使訪談者或參與者記錄在錄影帶上的話語無法分辨。但一般來說，這些不可辨的資料，並未影響到對兒童的概念分析。

兒童在研究者的佈局下，對有關「數概念」問題的解題方法及其對「數詞」的闡釋。均被加以錄影，錄影所得的結果即形成Ricoeur（1971）所謂的「文本（text）」，以供研究者作進一步的概念分析。儘管研究者個人的偏見影響，錄影所得的晤談過程無法標準化；然而，既經錄影存證，全部過程已成不可變動之「文本」，靜候經過一而再，再而三的重新檢視後，才能獲得的最具一致性的闡釋（interpretation）。此最佳的闡釋即爲研究者所能獲得的兒童「數概念」模型；而模型，如前所特別指出的，是研究者經驗的抽象並且隨著新事例的出現逐步演化的。

每次教學晤談後，研究者將反省晤談過程並依據顏淑茹的表現決定進一步的晤談問題以及晤談速度。過程的全部錄影首先全數轉登錄成原案（protocols）。全部錄

影記錄及其原案將用以分析，藉以歸納不同的「數概念」類型。分析的方法爲原案分析法（protocol analysis）。研究者在以特殊的標籤標記特定兒童的「數概念」或是「數」基模類型時，除需彰顯該「數」基模的本質活動外，並需對該基模的功能以及限制加以說明。從事概念分析時，除了基於已有經驗所源生的假設必需和錄影記錄加以辯證外，利用重複的情節（episodes）以及交錯的（triangulated）「證據」來去除研究者的成見以及對偶發事件的過度闡釋亦爲不可或缺的過程，概念分析的成果爲顏淑茹的「數概念」類型。

肆、顏淑茹的數概念

顏淑茹，7歲，接受訪談時是一年級的學生，她共接受10次的訪談。顏淑茹的數概念類型是起始數概念。特需指出的是，在上學期她的起始數概念十分有限，大約不超過15；到了下學期雖然有所延伸，但範圍沒超過多少。

利用再表現解求和數問題

所謂的再表現（re-presenting）是指將一概念透過具體事物加以表徵的活動，表徵活動的結果一般稱之爲概念的表徵（representations）。生在此處，利用再表現問題中的數概念成爲具體的手指數，從而解決問題。在本原案中，生解決的求和數問題是8＋5＝？，確定？數値的問題。

1993年11月22日 原案1

1. 師：數一下。（打開紅布）

2. 生：1.2.3.4.5.6.7.8，8個。

3. 師：這裡？

4. 生：5個。

5. 師：合起來。

6. 生：（手比8，心中重數8，約5秒..手比8.....手比5，手指數9.10.11.12.13）13。

生透過計數後，知道一加數爲 8（行 2），師待生確定另一加數爲 5 後，於行正式佈出併加型求和數的數值問題：8＋5＝？由行 6 可以看出，生先以手指再表現 8，重數之後，停約5秒，再一次的以手指再表現 8 與再表現 5，隨之曲指很微弱的唸出9，10，11，12，13，最後給出答案13。

生具備能再表現 8 及 5 的能力，由她以手指表示 8 和 5，顯然是毫無疑問的。主張她僅以序列性合成運思來解決8＋5＝？的對立假設是，她透過往上數的方式解題。如果她能往上數，她應能以 8 爲基礎，直接往上數（甯自強，1993a）。她的一再再表現8，顯示她無法不逆溯將 8 個 1 合而爲一的合成運思，直接完成解題。由是，對立假設應予推翻。即她透過再表現 8，及 5 後，再一次的合成13，以完成解題活動。

<u>利用再表現解求加數問題</u>

所謂的求加數問題，是指形如a＋？＝b，求？數值的問題。生於此原案中解答的是添加型的求加數問題：7＋？＝11，求？數值。

1993年12月20日 原案 2

1. 師：放 2 個，算算看，是不是 7 個？
2. 生：對。
3. 師：我如果再放...我再放幾個進去會變成11個？現在這裡有幾個？ 7 個對不對？
4. 生：對。
5. 師：我再放幾個進去會變成11個？
6. 生：（手比7，默數1.2.3.4在外面）4個。
7. 師：幾個？
8. 生：4個。

待生確定被加數是 7 之後，師於行 5 正式的向生佈出7＋？=11的缺加數問題。行

6 中，生先以手指再表現 7 ，隨後計數剩餘的 3 個手指之後，再向手指外，目光所及之處計數一次後，給出了答案 4 個。

由行 6 中可以見到的是生再表現 7 ，但卻看不見生再表現11。仍然地，對立假設是生利用往上數的方式解題。而對對立假設推翻的主要依據乃如同原案 1 中的分析所說明的－生無需再表現 7 ，可以逕由 7 開始。如此看來，生在行 7 中，數剩餘的 3 個手指與目光所乃處，應有其特別的意義，特別的是，在10指之外，爲何單數 1 。可能的情形則是生以手上10指，外加目光所及之處的 1 的心像合而而成11。易言之，此處生在進行解題時，除再表現 7 外，已再表現11後，才進行比較 7 與11。最後計數比較的差異，獲致正確的答數 4 。

利用再表現解求差數問題

所謂的求差數問題，係指形如a－b＝？，確定？數值的問題。下面呈現的原案是拿走型的求差數問題：10－3＝？

1993年11月22日 原案3

1. 師：10個，好，蓋起來....注意看哦！看好哦！....拿走3個，這裡幾個？
2. 生：...（約 3 秒）（手指頭比10減 3 ）剩 7 個。

師在行 1 佈出10－3＝？，求？的數値問題。由行 2 可以看出，生略加考慮後，先以手指再表現10，再由伸出的10指中移去 3 ，最後重新計數，給出了成功的答案 7 。

由行 2 的解題活動中，可以明顯的看出生一再的使用合成運思。先逆溯而得10個 1，用其中的元素合成 1 個 3 後取走，最後確定數値，則利用剩餘的手指，合成 1 個 7 ，而給出解答。透過再表現而解題的表現，十分明顯。

利用再表現的方式解求減數問題

所謂的求減數問題，是指形如a－？＝b的問題。在原案中所佈的求減數問題，是拿走型的。實際處理的問題是8－？＝2。

1993年11月22日 原案4

1. 師：剛才8個對不對？要不要算一算，是不是8個？

2. 生：1.2.3.4.5.6.7.8。

3. 師：8個對不對？拿走一些哦！剩幾個？

4. 生：（手指頭比8）....這裡有兩個。

5. 師：剩兩個，我拿走幾個？

6. 生：（手指比8，默數減6，1.2.3.4.5.6，手指剩2）拿走6個。

師自8中取走一些之後，在行3中指示生計數剩下的花片。生一邊再表現8，併計數桌面花片知道所餘爲2。師在行5中佈下，8－？＝2，求？的數値問題。生再表現8後，逐步減少再表現的手指表徵，並且同時計數直至剩下2手指。最後給出成功的解答6。

生除利用手指再表現8外，並且已有具體的剩餘2可供對照。一邊減少手指表徵使成2，另外逐步合成移走的手指應是她的活動目標。透過同時的數數活動，她成功的達成解題的目標。再表現活動與序列性合成運思的使用可說是十分明顯。

利用再表現的方式解求被減數問題

所謂的求被減數問題，是指形如？－a＝b的問題。原案中所佈的求被減數問題是拿走型的問題。必需特別說明的是，進行此一問題前，她已經在同類型的問題上產生挫敗，研究者特意縮小數値，以增加其成功的機會－所佈的問題是？－3＝5。

82年12月20日 原案5

1. 師：不知道？太難了，我換少一點好不好？...我拿走了3個，剩下5個。

2. 生：....（思索約15秒，手比5，另一隻比3，重頭默數1.2.3.4.5.6.7.8）8。

3. 師：幾個？原來幾個？

4. 生：原來8個。

由行 1 可以看出生在原案之前已經在數值較大的相同類題上有所挫敗。師因生久不作答，決策修改成數值較小的問題，從而佈出？－3＝5。由行 2 可以看出生思索了相當的時間後，以兩手各表徵 3 和 5 之後，最後給出了成功的解答 8 。

生在前一個問題上的挫敗以及在行中的遲疑顯示，生在此處的作答可能是首次解決缺被減數問題。易言之，對生而言，解缺被減數問題的策略可能尚未達到察覺的階段（甯自強，1993a）。然而不管其策略爲何，由數概念的觀點來看，她的確透過先再表現減數與差數成爲手指表徵後，再計數表徵，重新合成被減數 8 ，才成功的解題。顯然的，可立即使用的表徵物的數量大小，限制了她的解題威力。僅管如此，仍然可以看到她序列性的使用合成運思。

利用再表現解「多多少」的問題

所謂的「多多少」問題，是加法性比較問題中，求比較差異量的一種問題（蔣治邦及鐘思嘉，1991）。這種問題中，被比較量與比較基準量是已知的，而且被比較量的數值大於比較量的數值。原案中佈置了 2 條不同色的積木（標準的數學積木，上無刻痕），並用另色的積木加以測量。問題是 5 比 2 多多少？

1993年11月29日 原案6

1. 生：（用短積木排）2個。
2. 師：這個呢？
3. 生：（用短積木排）5個。
4. 師：這裡5個對不對？..這裡5個，這裡有2個，哪一個比較長？
5. 生：（指橘色5個）
6. 師：長幾個？
7. 生：（兩手各比2，併在一起，用眼睛數）3個。
8. 師：對了！你怎麼知道的？再講一遍。
9. 生：......（約2秒）。
10. 師：你怎麼做出來的？做一做我看看，好不好？

11. 生：這裡有兩個...這裡比較多3個。

確定長積木較短積木長且各自數值為 5 與 2 之後，師在具體物呈現的情形下（測量的積木單位已經取走），詢問 5 比 2 長多少？生以雙手各表徵2之後，目測長短積木的差距，並約估此差距可由多少測量單位積木塡滿，最後給出解答3個。再一次請生說明如何獲致解答，生無法具體說明。

必須說明的是，生雖在此一問題中獲致成功，但她在皮亞傑的長度保留測試（Piaget，1974）上是失敗的（甯自強1994；p.45）。換句話說，她可以保留物的數值，但卻無法保留長度，即尙無法使用數於連續量情境中。倘使她可以使用數於連續量情境中，問題對她而言應為 5 個單位長較 2 個單位長，長多少？可以透過單位的計數加以解決。然而，因為長度無法被單位化，問題遂轉化成長短兩積木的差距，可用幾個積木單位塡滿？生在行 7 中，兩手各比 2 ，併在一起，事實上僅是用以表示兩積木併排抵消的部份，透過再表現積木單位的實物，她以逐次塡滿差距的方式進行解題，由於約估上需要 3 個，她成功的確定了比較差異。本原案生的表現，亦同時促使研究者局限佈題的範圍於離散量情境。

利用再表現現解「少多少」的問題

所謂的「少多少」的問題，則是加法性比較中，求比較差異量數值的一種問題（蔣治邦及鍾思嘉，1991）。在這類問題中，被比較量與比較基準均為已知，且被比較量的數值小於比較基準。問題是 3 比 5 少多少？

1993年11月29日 原案7

1. 師：這 3 個，這邊 5 個對不對？哪一個比較長？
2. 生：（指 5 個）這個。
3. 師：哪一個比較短？
4. 生：（指 3 個）這個。
5. 師：短它幾個？

6. 生：（比3....比5...）短它兩個。

7. 師：你怎麼算的？（伸出5、3相疊）這樣嗎？...不是！..

8. 生：（比5，成3，指拇指和小指）這兩個。

確定長短積木數值各為5與3之後，師在行5中佈出3比5少多少的問題。行6中，生先各自再表現3與5成手指表徵後，判斷少的數值為2。行7中，師詢問是否透過一對一的比較，解得問題？行8中，生答以是以將比較基準改變成被比較量，確定改變的數值作為問題的解決歷程。

估且不論對生而言，5與3是指積木單位的個數，亦或是積木單位長度單位數。5與3在解題過程中，均被生以再表現的方式，呈現成手指表徵。生利用手指表徵上的差異，說明解決問題的過程，顯示了合成運思的序列性使用。至於她藉由將情境同化成求減數，5－？＝3問題，則是另一有趣的現象。

利用再表現解求積數問題

所謂的求積數問題，是指形如a×b＝？，求？數值的問題。原案中共佈出了2個求積數問題，都是在沒有具體物情境下的：(1)5×5＝？(2)5×3＝？

1993年11月29日 原案8

1. 師：5支要幾個？蓋起來不給你看。5支，要幾個？

2. 生：...............（約25秒）

3. 師：眼睛閉起來......張開....這個要幾個？（橘色積木）

4. 生：5個。

5. 師：3枝要幾個？（平行放，用布蓋住）

6. 生：（比10，用其中一隻手數6.7.8.9.10，數回來11.12.13.14.15）15。

7. 師：對了！.....（加一枝）蓋住。

8. 生：（比5，表剛才的15，數另一隻手16.17.18.19.20）20。

由行 2 可以看出，生無法解決5×5＝？的問題。師遂重新於行 5 中佈出5×3＝？的問題。生先用雙手再表現了2個5。以6，7，8，9，10計數一隻手後，用同一隻手再計數另一個5，得出成功的解答15。師又再添加 1 個 5 。生以一手再表現出5後，計數另一手而得正確的答數20。

生在行中以一手計數 6 至10後，再用同一手計數11至15保持另一隻手不動，顯示在他的計數活動中，此手必有另外的功能。唯一的可能性則爲此手代表了第一個 5 。限於手指表徵的限制，她計數了2個5之後，只好以另一手再表現5，加以計數。生在行 8 中所解的問題不是5×4＝？，而是15＋5＝？她的以再表現 5 指代表15，以及計數另一隻手的 5 ，並未脫離以再表現爲主要解題策略。至於無法解決5×5＝？可能是受限於手數。

利用再表現的方式解等分除問題

所謂的等分除問題，是指將一定數量平分至若干地點，求地點數的問題。原案是9÷3＝？，求？數值的問題。

1993年12月6日 原案9

1. 師：9個紅餅乾對不對？分給3個小朋友分得很公平，每個小朋友可以分到幾塊？
2. 生：（比9，彎下手指，1.2.3，1.2.3，1.2.3）分3塊。

師佈下9÷3＝？，求？的數值的等分除問題後，生再表現數值 9 之後，以 3 個一分的方式，分了三次，全部窮盡後，給出成功的答數。

不管生在行 2 中的答案是出自於1，2，3的3個，或是三次1，2，3的3次，生透過再表現 9 ，進行解題是無庸置疑的。倘使生的答案是1，2，3的 3 個，問題在於她如何預知 3 個？易言之，她已知問題答案，無需再表現如何求解，此假設應予推翻。對立假設則是答案 3 代表了三輪1，2，3的三輪。易言之，生是透過逐一分配的方式解決等分除的問題。1，2，3的出現，意味每個小朋友各 1 的具體活動， 3 個小朋友

第一輪分走第1個1，2，3。總共3次，各有3個。

在解等分除問題上的挫敗

由於手指表徵上的限制，具備起始數概念的兒童，在解等分除問題上使用逐一分配策略上有相當大的困難，尤其是數量大於10時。此外，解決等分除問題，也未必使用逐一分配的具體活動。在下面原案中雖然被分配的數量不是具體物，但每一小朋友都以一塊方布代表。原案中，記錄了生的另一種解題策略。

1993年12月6日 原案10

1. 師：好，剩15塊對不對？.....15塊哦！我要分給5個小朋友，每個小朋友得幾個？（用手蓋住15塊餅乾）
2. 生：...（約5秒）6塊。
3. 師：6塊！你怎麼分的？....分一次我看看..你在心裡怎麼分的？
4. 生：....（約4秒）不知道。
5. 師：...好，分分看！
6. 生：（數幾個到一塊布上，再數幾個到紅布上，數....剩5個）5個。
7. 師：5個哦！要不要重分（生搖頭）...來，重新分...。
8. 生：（嘗試各種方式、拼湊......）少了一個。
9. 師：少了一個...你要分給幾個人？
10. 生：5個。
11. 師：分給5個人....。
12. 生：（分....）怎麼少一個？（繼續分約30秒）........（終於分好，一人3個）
13. 師：有沒有分？...分好了沒？
14. 生：好了。
15. 師：每人幾個？
16. 生：3個。
17. 師：3個，有沒有分得很公平？..夠不夠分？

18. 生：夠！

生在行 2 的答案 6 塊是如何獲致的，並不清楚。針對生的挫敗，師決定以具體物情境重新佈題。即提供15個具體物，以及代表 5 個小朋友的方巾，以供生進行。行6-7，顯示生忽略了窮盡，因而無法解答導致停止。解題的方式則爲包含除型態。教師再予鼓勵，生將15同時分出，也顧及到等分（有一方布上爲 4 個，她並未發現），從而結論具體物不足。經過再一次的調整後，最後終於透過具體活動，成功的給出了解答 3 。

生無法以再表現的方式逕行求解15÷5＝？可能的限制一方面是15以手指表徵的困難，另一可能則是同時控制 5 個未定數值的集聚單位所產生的困難程度。由整個原案來看，她並未察覺逐一分配策略是有效的解決等分除問題的方式。由行 6 的停止於有剩餘，可以看出她企圖猜測答案，採用包含除的方式進行解題。行 8 只是另一個有失誤的嘗試而已。基於對等分的預期，使她進行逐步的調整比較，最後獲致結果。與前一原案加以比較，可能挫敗的原因在於無法同時控制 5 個未定數值的困難，而非手指表徵的困難，因爲具體化活動，已經剔除了表徵15的需求。

無法理解離散量交換問題

所謂的交換問題（trading problem），係指以固定比例交換物品，求交換所得數值的問題。例如以 2 換 3 ，則可以換若干的問題。原案中，由於生的數概念仍爲起始數概念，所以所佈的問題爲最簡單的形式：固定比例爲 1 比多。使用的比例是 1 比 2 。

1993年12月6日 原案11

1. 師：好，沒換的啊！這個都你的啦（指剩下的紅色）！對不對？這樣會不會玩？.....現在我跟你換哦！換回來....一個藍的跟你換...。

2. 生：（拿出兩個紅的）

3. 師：（再拿出一個藍的)

4. 生：（拿出兩個紅的）

5. 師：我現在要一次換兩個（拿出兩個藍的）。

6. 生：（拿出一紅）

7. 師：我兩個只換你一個啊！一個藍的換兩個紅的呢？.....藍的比較貴對不對？...
好嘛！拿一個換，換一個。

8. 生：（再拿出一個紅的）

9. 師：那我拿3個跟你換。

10. 生：（拿出兩個）

行2-4中，師透過具體活動的實施以一個藍色花片和生交換 2 個紅色花片。進行了兩次之後，師取出 2 個藍色花片嘗試交換，然而生則只取出 1 個紅色花片。師在行 7 中再次說明，行 8 中兩人再進行一次 1 藍換 2 紅的活動。行 9 中，師企圖換出 3 個藍的，而生則拿出 2 個紅的作爲交換。

由行 7 可以看出，當師退回換 1 個藍色花片時，生的加添另 1 個紅色花片作爲回應，生確實知道以 1 籃換 2 紅。然而，由進行到行 9 ，生卻又失敗。可以瞭解對生而言，以 1 換 2 兩數雖可併置，但尚非可以被重複的併置類型。

<u>數概念向量性質測試上的失敗</u>

所謂「數的向量性測試」是指以一段非由 1 開始的數詞序列一一對應一群具體物後，要求生結論該群具體物的數量。通過此一測試者，能將數過的數詞重新再數，而此一特徵則爲內嵌數的特徵。

1993年12月20日 原案12

1. 師：好，你要不要再算一次有幾個？你要不要再算一次有幾個？

2. 生：（手指數花片）1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12。

3. 師：總共幾個？

4. 生：12。

5. 師：注意看哦！（從第一個花片數）3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14，總共有幾個？

6. 生：14。

生確定總數有12個花片之後，師刻意地由 3 數起數至14，並詢問其共有多少？生則以14作答。以14作答爲基礎推測生可能的數概念類型，可以有二：一爲數的前置概念（甯自強，1997），另一爲起始數概念。基於前面在原案上的表現，生的數概念類型則被假設爲起始數概念。

<u>假的往上數方式解求和數的問題</u>

所謂的往上數（counting up）是指以一數爲基礎，一邊再表現被計數的數，一邊累進數詞位置。例如，由8往上數5，則兒童會9(1)，10(2)，11(3)，12(4)，13(5)，停在13上。往上數是內嵌數的特徵。

1994年5月16日 原案13

1. 生：1.2.3.........12。
2. 師：對不對？....這裡數一數有幾個？
3. 生：1.2.3........10。
4. 師：這裡12個對不對？這裡10個對不對？放在一起有幾個？（手蓋住）
5. 生：（搖頭）
6. 師：不知道...有12個，有10個。
7. 生：（伸出雙手，13.14.......22）22。

生確定了被加數爲12，加數爲10之後，師隨之佈出12＋10＝？的求和數問題。行 5 中，生先搖頭。師再提示被合成的兩數爲12與10。生遂攤開雙手十指，並由13開始數起，數至22停止，給出成功的答數22。

行 7 中，生由13數起顯示她是以12爲基礎的。行 7 中她的數數彷彿是往上數。其

實不然，她的往上數不是眞的往上數，由13數至22，實際上是在計數攤開的十指。由於她是先再表現10後，再逐一由13開始點數，並非一邊再表現10。一邊計數和數。由是，她的往上數並非眞的往上數活動。儘管如此，她在原案中的表現顯出了她的一個重要進步：她不需辛苦將被加數重新表現一次；取而代之的是，她簡縮（curtails）此段歷程，而以簡單的單詞12加以取代。識者或謂，未見她提起12；然而如無12，則13何以來？雖然並未外顯於活動中，但13的出現預先假設了12的被妥當考慮。

透過節縮的再表現解求加數問題

所謂的節縮的再表現（curtailed re-presentation），係指原有的再表現活動，被行爲者以節縮的方式進行。例如，再表現 8 的活動，原需由 1 開始逐步再表現至 8 爲止，現則可以以 8 的再表現代替原有的一段過程。下面的原案是生解求加數問題的記錄。

1994年5月23日 原案14

1. 師：3個...閉起來....張開...原來有3個對不對？我再放進去幾個會變成12個？
2. 生：（4.5........12）9個。
3. 師：怎麼算的？講一遍！
4. 生：3（比3）4.5.6..........12。

師在行 1 中佈出3＋？＝12的求加數問題。生隨之透過由 4 ，數至12的活動，確定了成功的解答，9個。師要求生說明如何解題。生以手指再表現 3 後，繼續往下數至12作爲說明。

倘使生在行 2 中的解答是源自於往上數的活動，而非節縮了3的再表現，則在行4中，生無需再表現整個 3 ，並隨之繼續數。由是，生可以以節縮的再表現解求加數問題。

利用節縮的再表現方式解求減數問題

利用節縮再表現的方式，亦可以擴大解求減數問題上的威力，下面的原案是生解

類似問題的一個記錄。

1994年5月23日 原案15

1. 師：對了，16個對不對？（用布蓋住）我要拿一些掉，不給你看，16個拿掉一些後，剩7個，我拿掉幾個？
2. 生：（比手指頭）9個。
3. 師：怎麼算？
4. 生：本來是16，減掉...7.8.9...剩下7個。

師佈出求減數問題16－？=7之後，生以手指的表徵求出正確的答數 9 。師進一步詢問如何解題。生攤開10指後，一邊曲指一邊數7，8，9，以剩下的7指證實她爲正確。

由行 4 可以看出生自 7 開始數起。換句話說，生掌握了一個不外顯的6。從攤開10指來看，她事實上是再表現了16，而6則10指以外的 6 。生沒有再表現 6 ，而直接由 7 數起，則表現了她是以節縮的再表現來掌握 6 的使用的。

利用節縮再表現的方式解求積數問題

節縮再表現的活動亦可使用於求積數的問題上。下面原案是生的一個解題情節（problem-solving episode）。

1994年5月16日 原案16

1. 師：24，24個花片....現在這裡有幾朵花（拿走2朵）？
2. 生：4朵。
3. 師：4朵花有幾個花片？（蓋住）
4. 生：........16。
5. 師：你算對了！你怎麼算的？手放上來。
6. 生：8（伸出雙手，9.10........16）16。

師向生佈出一朵花有4個花片，4朵花共有多少花片的4×4＝？的求積數問題。生忖度了一下，在桌下操弄手指，給了正確的答案16。師要求生說明解題過程，並將手上的動作表現出來。生口頭上說8之後，伸出雙手8指，逐一由9數起，數至16。

兩隻手8個手指，同時表現了第3及第4個4。生已知前2個4是8，並未如同後2個4一般予以再表現，而直接以8爲節縮再表現，繼續其他2個4的點數，成功地完成了解題活動。

數數過程中混淆了數詞序列

所謂數數的過程中，混淆了數詞序列，係指在進行數數時，由於對數詞序列的掌握不夠熟稔，錯用了數數的方式。生在下面的原案中，混淆了數詞序列。

1994年5月23日 原案17

1. 師：9個，對不對？3支是9個，再放一支進去。
2. 生：12。
3. 師：怎麼做的？
4. 生：本來9（比手指頭）10.11.12。
5. 師：好，12，4支12個，再放一支。
6. 生：15。（13.14.15）
7. 師：再放兩支。
8. 生：21。（16.17......21）
9. 師：再放3支。
10. 生：30。（22.23.24.......30）
11. 師：再放兩支。
12. 生：90。
13. 師：90？怎麼算的？30...再來40.50.60.......80是不是這樣算？
14. 生：（點頭）

師在生成功的解出3×3=9之後，佈出再一個3的結果是多少的問題。生再表現9之後，隨之給出正確答案12。師隨後追加1個3，2個3及3個3，生均成功的完成解題。生到達30後，師再追加2個3，而生卻給出了90為答案。師詢問生是否由30開始繼續10個一數，生點頭同意。

生在行12中的表現可以被假設成生失去集聚單位3的低階單位數值1，而混淆成10。即，集聚單位3中的3個1變成3個10。此一假設由生在行4-10中的表現，應予推翻；因為生在其中不斷將1個3化成了3個1。特別的，針對10來說，10是新單位，誤認10為1的可能性遠大於誤認1為10。另一對立假設則是生混淆了數詞序列，將10個1數的數詞序列與1個1數的數詞序列相混淆。在不能清楚的區分10與1之前，由40到90，只不過是6個數數動作而已，而2個3中亦包含了6個數數的動作。因而對立假設成立的可能性應較單位的混淆的可能性為大才是。

總之，顏淑茹的數概念屬於起始數概念類型。無法通過數概念向量性的試驗，以及節縮的再表現在在的否定她具有更高階數概念的可能。她解決與數詞有關問題的策略主要是透過再表現而達成的。到了下學期（原案13~17），她的數概念雖有進展，由逐一再表現演化成節縮再表現，但仍未到達內嵌數概念類型。

參考文獻

Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective. Hillsdale, NJ: LEA.

Euclid (1926). The thirteen books of Euclid's Elements. (T. L. Heath trans. and ed.) Cambridge, England: The University Press.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics. pp. 243-275. New York, NY: Macmillan Pub. Co..

Gauss, C. F. (1800/1929). Zur Metaphysik der Mathematik. Werke, 12, pp. 57-61. Berlin: Springer Verlag.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). The child's understanding of number. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Hiebert, J. & Behr, M. (1988). Introduction: Capturing the major themes. In. J. Hiebert & M. Behr (Eds.) Number concepts and operations in the middle grades. pp.1-18. Reston, VA: NCTM.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). The growth of logical thinking from childhood to adolescence. New York, NY: Basic Books, Inc..

McLellan, J. & Dewey, J. (1895). The psychology of number. New York: D. Appleton & Co.

Ning, T.C. (1992). Children's meanings of fractional number words. Unpublished doctoral dissertation. The University of Georgia, Athens, GA.

Piaget, J. (1965). The child's conception of number. New York: W. W. Norton.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1974). The child's construction of quantities. New York, NY: Basic Books., Inc..

Ricoeur, P. (1971). The model of the text: Meaningful action considered as a text. Social Research, 38 (3),.529-562.

Russel, B. (1903). Principles of mathematics. New York: W. W. Norton.

Steffe, L. P., Cobb, P., & von Glasersfeld, E. (1988). Construction of arithmetical meanings and strategies. New York: Springer Verlag.

Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J., & Cobb, P. (1983) Children's counting types: Philosophy, theory, and applications.

New York: Praeger Scientific.

von Glasersfeld, E. (1995). Radical constructivism: A way of knowing and learning. Washington, D. C.: The Falmer Press.

von Glasersfeld, E. (1981). An attentional model for the conceptual construction of units and numbers. Journal for Research in Mathematics Education, 12 (3), 83-94.

von Glasersfeld, E. (1982). Subtizing: The role of figurative patterns in the development of numerical concepts. Archives de Psychologie, 50, 191-218.

甯自強。(1993a)。《經驗、察覺、及瞭解在課程中的意義～由根本建構主義的觀點來看～》。論文發表於國小數理科教育學術研討會。台東市台東師範學院六月五日。

甯自強。(1993b)。「建構式教學法」的教學觀～由根本建構主義的觀點來看～。《國教學報》，5，33-41。

甯自強。(1993c)。《國小低年級兒童數概念發展研究(I)—「數概念」類型研究(I)》。國科會專題研究計劃報告。NSC 82-0111-S-023-001。

甯自強。(1994)。《國小低年級兒童數概念發展研究(I)—「數概念」類型研究(II)》。國科會專題研究計劃報告。NSC 83-0111-S-023-001 A。

甯自強。(1995)。《五個區分對數與計算教材設計的影響》。論文發表於84年師院教授座談會。板橋國民學校教師研習會二月十六日。

甯自強。(1997)。《劉裕誠的數概念》。載於國立嘉義師範學院主編《1997海峽兩岸幼兒教育學術研討會論文集》，167-185。嘉義民雄。國立嘉義師範學院。

蔣治邦，鍾思嘉。(1991)。低年級學童加減概念的發展。《教育心理與研究》，14，35-68。

註：本研究部份蒙國科會專題計畫補助，計畫編號NSC84-2511-S-023-005，特誌申謝；文中論點純屬作者個人意見，不代表國科會立場。

Su-Ju,s Meanings of Number Words

Tzyh-Chiang Ning

National Chiayi Teachers College

Abstract

With radical constructivism and Piagetian's scheme theory as epistemological and psychological assumptions, the author hypothesizes number concepts as composite units and classifies the meanings of number words of pupils in first grade into two levels: (1) initial number concept (2) embedded number concept. Through an implementation of teaching interview, Su-Ju's reactions on solving number problems were gathered for further conceptual analysis on her meanings of number words. The result has revealed that he was at the stage of initial number concept. Interpretations on the characteristics of her number concept were further signified within 17 selected protocols.