國立鳳山高中 100 學年度教師甄試數學科試題卷

1. 設 A、B、C、D 表 $z^4-z^2+1=0$ 之四根在複數平面上的對應點，又 P 表複數 i 在複數平面上的對應點，則 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}$ ＝？(8 分)

2. 袋中有 1 , 2 , …,9 號球各一個 , 每次自袋中取出一球 ,取後放回,共取 n 次, n 次和為偶數的機率記為 P_n ，求(1) P_{n+1} 及 P_n 之關係式? (6 分)

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ = ? (6 分)

3. 利用<u>最小平方法</u>得到二維數據 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, y 對 x 的迴歸直線為 $y = a + b x$，另一組二維數據 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_n, v_n)$ 是透過 $u = c + d x$, $v = e + f y$ 所得到， 已知 a,b,c,d,e,f 為定值，求 v 對 u 的迴歸直線方程式?(8 分)

4. 已知拋物線 $y^2=mx$（$m>0$），與圓 $(x-2)^2+y^2=3$ 在第一象限交於相異兩點 A、B，且 $\overline{AB}$ 的中點 P 恰好落在直線 $y=x$ 上，求 m 值？(8 分)

5. 四邊形 ABCD 為圓內接四邊形，$\overline{AC}$ 為直徑，且 $\overline{AC}=2$，又 $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$，則 $\overline{BD}$ 長為？(8 分)

6. 二函數 $f(x)$，$g(y)$ 均為可微分函數且滿足：對所有 x，$y\in R$，$f(x+2y)=f(x)+g(y)$，若 $f(0)=1$，$f'(0)=2$，求 $g(10)$。(8 分)

7. 求方程式

   $$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}=y\text{，}$$

   x，y 的非負整數解，其中共有 2011 個 $\sqrt{\ }$ ，且 $\sqrt{\ }$ 指正根而言。(8 分)

8. 四面體邊長分別為 1，1，1，1，a，b (其中 a，b 為歪斜線段長)，試求四面體體積最大值。(8 分)

9. 設有一函數 $f(x)$ 滿足 $\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+b$，自點 $P(1,1)$ 作曲線 $y=f(x)$ 的二切線互相垂直，求 a、b 值？(8 分)

10. 三正數 a，b，c，且 $a+b+c=3$，試求 $\log_4\left(\frac{3}{a}-1\right)+\log_4\left(\frac{3}{b}-1\right)+\log_4\left(\frac{3}{c}-1\right)$ 的最小值(8 分)

11. 已知 a,b,c 為三相異有理數 ,試證：$\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}$ 為完全平方數(8 分)

12. 整係數多項式 $p(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,若 p(0) 和 p(1)的值均為奇數， 證明: p(x)=0 沒有整數解(8 分)