

數學科教師甄試試題

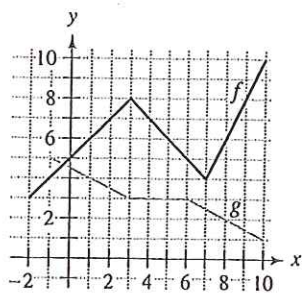
一、填充題

1. 四面體 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 3$ ， $\triangle ABC$ 的面積為 15， $\triangle ABD$ 的面積為 12， $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 所形成的兩面角，其夾角為 30° ，則此四面體的體積為 _____ (1)
2. 在 $\triangle ABC$ 中， M 為 \overline{BC} 邊之中點，若 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AC} = 5$ ，且 $\angle BAC = 120^\circ$ ，則 $\tan \angle BAM =$ _____ (2)
3. 設 $\triangle ABC$ 內接於半徑為 1 的單位圓， O 為圓心且 $\angle A = 60^\circ$ ，若 $k\overline{OA} + \overline{OB} + 2\overline{OC} = \vec{0}$ ，則實數 $k =$ _____ (3)
4. 設 S 為座標平面上由下列不等式組所定義的區域：

$$\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x - 2y \leq -4 \\ x + 5y \leq 31 \end{cases}$$
 - ① 若 $f(x, y) = kx + y$ 在點 $(2, 3)$ 處有最小值，則實數 k 的範圍為 _____ (4)
 - ② 在 S 上找一點 $Q(x, y)$ 使 $(x+5)^2 + (y-2)^2$ 為最小值，則 Q 的座標為 _____ (5)
5. 已知平面上的點排列 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ ，其中各點座標定義如下：

$$x_1 = 1, y_1 = 0 \text{ 且 } x_{n+1} = \frac{3}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n, y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{3}{5}y_n,$$
 試求：① 能使 $x_n + \alpha y_n = \beta(x_{n-1} + \alpha y_{n-1})$ 成立的正實數 α, β 值，則 $(\alpha, \beta) =$ _____ (6)
 ② $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = (a, b)$ ，則 $(a, b) =$ _____ (7)
6. 設 a, b, c 為正數， f 為由矩陣 $\begin{bmatrix} a & -b \\ \sqrt{3}a & c \end{bmatrix}$ 表示的線性變換 (Linear transformation)，當橢圓 $4x^2 + 8y^2 = 1$ 經 f 變換後之圓形是以原點為圓心，1 為半徑的圓，則 $(a, b, c) =$ _____ (8)
7. 設一元三次方程式， $x^3 - 17x^2 + 32x + a = 0$ 為兩個複數根 $b + i, 1 + ci$ ，其中 a, b, c 均為不等於 0 的實數，則此方程式的另一根為 _____ (9)
8. 將三個球全部放入兩個不同的箱子中，若隨機變數 X 為空箱的數目，則隨機變數 X 的期望值為 _____ (10)
9. 某水果種子的發芽率是 90%，設每顆種子發芽成功與否彼此互不影響，農民同時種下了 100 顆種子，則發芽成功的顆數期望值為 _____ (11) 顆，標準差 _____ (12) 顆
10. 設 Γ 為以圓 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 繞 y 軸旋轉的立體 (torus)，則 Γ 的體積為 _____ (13)， Γ 的表面積為 _____ (14)
11. ① $\int_1^4 x^{-2} dx =$ _____ (15) ② $\int_2^4 \sqrt{4-x^2} dx =$ _____ (16)

12. 下圖之 f, g 且 $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$,
 則 $p'(1) = \underline{\hspace{2cm}} (17)$, $q'(4) = \underline{\hspace{2cm}} (18)$



二、計算證明題

1. 設 $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, $x > 0$

(1) 分別以 $0 < x \leq 1$, $x > 1$ 兩種情形說明 $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ 的幾何意義。

(2) 試求 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = ?$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = ?$

(3) 試畫出 $y = g(x)$ 的圖形。

2. 試問下列級數是否收斂？並說明其原因。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{6}\right)^n$ 。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ 。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ 。