國立新化高級中學102學年度第1次專任及代理教師甄選初試數學科試題

一、填充題（每題4分，共40分）

1. 設$f'(x)$表示實係數多項式函數$f(x)$的導函數，已知$y=f'(x)$的圖形是一個通過點$(1,0)$和點$(2,0)$且開口向上的拋物線，試問下列哪些選項是正確的? 1, 3

(1) $f(x)$一定是三次多項式 (2) $f(x)$在$1<x<2$的範圍內必為遞增 (3) $f(x)$一定恰有兩個極值 (4) $f(x)=0$一定有三個實根 (5) $f(x)=0$在$1\le x\le 2$的範圍內一定有實根

2. 有兩組數值資料 X 與 Y,其相關係數為 r,平均數各為u_x,u_y,且 Y 對 X 的迴歸線為 y=ax+b,則下列哪些選項正確? 1, 3, 4, 5

(1) 若資料 X 和 Y 已經標準化,則 b=0 (2)當$u_y=0$,則迴歸線過原點

(3)迴歸線必過(u_x,u_y) (4) 若資料 X 和 Y 已經標準化,則 a=r

(5) 若σ_x,σ_y各為數值資料 X 與 Y 的標準差,則$a\sigma_x=r\sigma_y$.

3. 設空間中 P(x,y,z)滿足不等式 $\begin{cases}0\le x+y\le 2\\0\le y+z\le 2\\0\le x+z\le 2\end{cases}$ ，此 P 點之點集合形成一平行六面體,求此平行六面體體積為 4

4. 設$m\in R$,若方程式$x^2-(m+7)x+(m^2+16)=0$有兩正根α,β則$\alpha^2+\beta^2$的最大值為 50

5. 求$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{\left|n-\sqrt{n^2+1}\right|}{\sqrt{3}}=$ $\frac{\sqrt{3}}{6}$

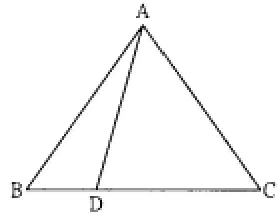
6. 設$f(x)=ax^2+bx+c$,其中 a , b , c 為整數。若$f(1)=0, 50<f(7)<60, 70<f(8)<80$,且存在整數 k 使得$5000k<f(100)<5000(k+1)$,則 k= 3 .

7. 某實驗室欲評估血液偵測阿茲海默症技術的誤判率（即偵測錯誤的機率）。共有 2010 人接受此血液偵測技術實驗，實驗前已知樣本中有 1970 人未患阿茲海默症。實驗後，血液偵測判斷為未患阿茲海默症者有 1905 人，其中真正未患阿茲海默症有 1900 人。試問此血液偵測技術的誤判率為 5/134 。(化成最簡分數)

8. ΔABC中,三邊長為 a,b,c,若$c=\dfrac{a+b}{3}$,且$\cos B=\dfrac{c}{2a}$,求$\sin C=$ $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

9. 科學家以碳 14 檢測一件在雲南挖掘出的人頭蓋骨，發現該頭蓋骨上碳 14 的含量占原來的 $\frac{21}{100}$。若碳 14 的半衰期約為 5700 年，試估計其年代距今約為___13___千年(以最接近之正整數作答) 。(說明: 放射性元素碳 14 是考古學上常用的利器。生物在生存的時候，由於進行呼吸作用，其體內的碳 14 含量大致不變；而生物死去後停止呼吸，此時體內的碳 14 開始減少。考古學家可以根據死亡生物體的體內殘餘碳 14 成分來推斷它的存在年齡。$\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，$\log 7 \approx 0.8451$)

10. 如右圖,等腰三角形 ABC, $\overline{AB}=\overline{AC}=3$, D 在 $\overline{BC}$ 邊上,求 $\overline{DA}^2+\overline{DB}\times\overline{DC}=$ ___9___



二、填充題（每題 5 分，共 40 分）

1. 方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4=20$，其中 $1\le x_1\le 6$，$0\le x_2\le 7$，$4\le x_3\le 8$，$2\le x_4\le 6$，則其所有整數解的個數有___96___個。

2. 若 $a\in N$，方程式 $3^{2x}+a\cdot 3^x-a^2=0$ 恰有一根介於 0 與 $\frac{1}{2}$ 之間，則 a=___2___。

3. $x^{1959}-1$ 除以 $(x^2+1)(x^2+x+1)$ 之餘式為___x^3-1___。

4. 若 $x^4+2\sqrt{3}(\log_2 k)x^2+1-(\log_2 k)^2=0$ 有四個相異實根，則 k 的範圍為___$\frac{1}{2}<k<\frac{\sqrt{2}}{2}$___

5. 設 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，令 $a_n=[\log n], n\in N$，則 $\sum_{n=50}^{150} a_n=$___152___。

6. 設 $T=\sum_{n=1}^{30}\frac{n}{3^n}$，將 $\frac{3}{4}-T$ 以小數表示，其在小數點後第 k 位始 出現不為 0 的數字 a，則 (k, a)=___(14, 7)___。

7. 一袋中有 4 紅球，5 白球，自袋中每次取出一球，取出不放回，取完為止。若袋中每一球被取中機會均等，則在取球過程中紅球個數不多於白球個數的機率為___1/3___。

8. 用 0，1，2，3，4 中不同的數，填入右圖中的 4 個格子(每格一個數)。如果將每一種填法的四個數字相加，分別記為 $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n$，這 n 個和的算術平均數為 $\overline{X}$，中位數為 Me，則 $(\overline{X}, Me)=$___(8, 8)___。

三、計算題（共 20 分，每題必須列出計算過程，否則不予計分）

1.某項調查學生 10 人，記錄期末考數學成績與學期數學課缺課數，如下表所示：

學生	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸
缺課數 x	1	4	3	3	4	3	5	4	3	0
成績 y	100	90	90	80	70	70	60	60	80	100

(1) 試求出缺課數 x 與數學成績 y 的相關係數 r=__-0.8__(4 分)

(2) 試求數學成績 y 對缺課數 x 的最適合直線方程式為__$y=-8x+104$__（4 分）

2.設$O(0,0,0)$為座標空間中某長方體的一個頂點，且知$A(2,2,1)$，$B(1,-2,2)$，$C(6,-3,-6)$為此長方體與 O 相鄰的三頂點，若平面 E 將此長方體截成兩部分，其中包含頂點 O 的那一部份是個正立方體，則平面 E 的方程式為何？（6 分）

Ans： $2x-y-2z-9=0$

3.已知$f''(x)=3x^2-1$且曲線$y=f(x)$通過點$(1,1)$，又在此點與直線$2x-y=1$相切，求此曲線方程式為______________.(6 分)

Ans： $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{4}$