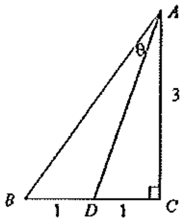
台北市立內湖高工 100 學年度數學教師甄選筆試試題

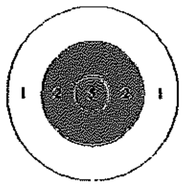
一、填充題 70%（每格 5 分）

1. 若直線$12x-5y=21$與二直線$x=\dfrac{23}{39}$、$x=\dfrac{16}{13}$分別交於A、B二點，則線段長$\overline{AB}=$ __(1)__ 。

2. 已知ΔABC 中，$\angle C=90^\circ$，D在 $\overline{BC}$線段上，且$\overline{BD}=1$，$\overline{DC}=1$，$\overline{AC}=3$，$\angle BAD=\theta$，如圖(一)所示。$\tan\theta=$ __(2)__ 。



圖(一)



圖(二)

3. 某甲玩射飛鏢遊戲，靶的最內層、中間、最外層的同心圓半徑分別為 3、9、15 公分，且所得分數分別為 5 分、2 分、1 分，如圖(二)所示。飛鏢落在靶外的機率是$\dfrac{1}{26}$，且得 0 分。若飛鏢落在圓形靶上，則得到某分數的機率與該分數區域面積成正比。問某甲射出一隻飛鏢得到分數的期望值為 __(3)__ 。

4. 求正焦弦長為$\dfrac{14}{3}$，兩焦點為$(3,-3),(3,5)$的雙曲線方程式為 __(4)__ 。

5. 設$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ |\vec{c}|=5$，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$。求$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$ __(5)__ 。

6. 設$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$，若$f(a)=3$，$f(b)=4$，則$f(a+b)=$ __(6)__ 。

7. 若$(\sin100^\circ+i\cos100^\circ)^{21}=a+bi$，則$(a,b)=$ __(7)__ 。

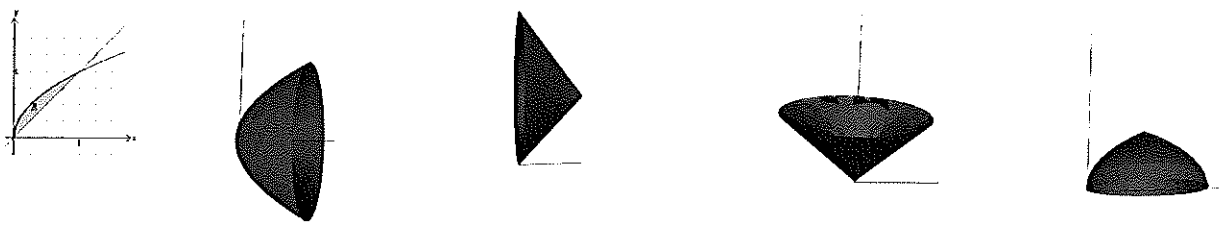
8. 設ΔABC 的邊長分別為a、b、c。若ΔABC 外接圓的面積為25π，內切圓的面積為4π，則$\dfrac{abc}{a+b+c}=$ __(8)__ 。

9. 設$f(x)=x^4-6x^3+12x^2-6x+4$，則$f(x)$除以$(x-\sqrt{2}-1)$的餘式為 __(9)__ 。

10. 求$C_2^9(-3)^2+C_3^9(-3)^3+C_4^9(-3)^4+C_5^9(-3)^5+C_6^9(-3)^6+C_7^9(-3)^7+C_8^9(-3)^8+C_9^9(-3)^9=$ __(10)__ 。

11. 求由$y=\sqrt{x}$與$y=x$所圍成的區域R，繞下列直線旋轉一週所形成立體的體積。

(a) x軸 __(11)__ (b) $y=1$ __(12)__ (c) y軸 __(13)__ (d) $x=1$ __(14)__



二、判斷下列敘述是否正確？若正確請證明，若錯誤請舉反例。20%（每小題 5 分）

1. 已知對任意實數 x，$f(x)\le g(x)\le h(x)$。若 $\lim\limits_{x\to\infty}[h(x)-f(x)]=0$，則 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 存在。

2. 若 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 連續且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$（$n\in N$），則 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$（$x\in R$）。

3. 設 a、b 為實數，$a\ne 0$ 且 $f(x)=ax^2+bx+1>0$，$\forall x\in R$。

   若 $g(x)=x^2(ax^2+bx+1)$，則 $g''(x)>0$，$\forall x\in R$。

4. 設 a、b 為實數，$a\ne 0$ 且 $f(x)=ax^2+bx+1>0$，$\forall x\in R$。

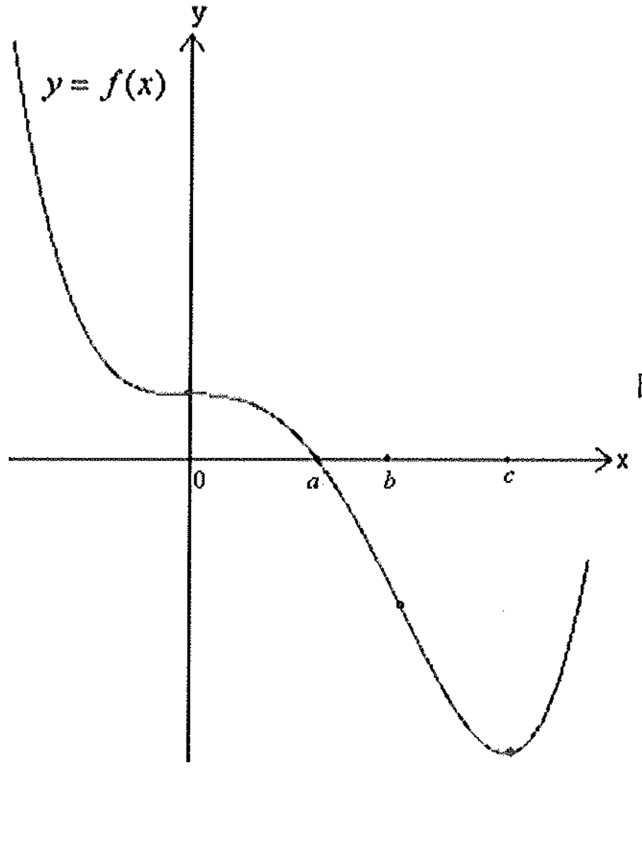
   若 $g(x)=(ax^2+bx+1)^2$，則 $g''(x)>0$，$\forall x\in R$。

(註 $\forall$:for all)

三、作圖 10%

1. 已知 $f(x)$ 為 4 次多項式函數，$y=f(x)$ 函數圖形如圖(三) 所示。請繪製 $y=f'(x)$ 的圖形。

   (繪圖重點：函數值正負、增減、凹性)

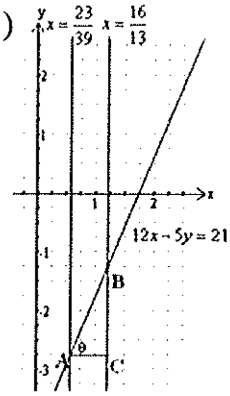


圖(三)

答案

一、填充題

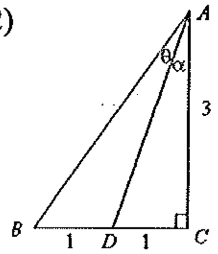
1. (1)



$m=\tan(\angle BAC)=\frac{12}{5}$ ， $\overline{AC}=\frac{16}{13}-\frac{23}{39}=\frac{25}{39}$

$\overline{AB}=\overline{AC}\sec\theta=\frac{25}{39}\cdot\frac{13}{5}=\frac{5}{3}$

2. (2)



$\tan(\theta+\alpha)=\frac{2}{3}=\dfrac{\frac{1}{3}+\tan\theta}{1-\frac{1}{3}\tan\theta}$

$\tan\theta=\frac{3}{11}$

3. (3)$\frac{16}{26}\times 1+\frac{8}{26}\times 2+\frac{1}{26}\times 5+\frac{1}{26}\times 0=\frac{37}{26}$

4. (4)$\frac{2b^2}{a}=\frac{14}{3}$ and $a^2+b^2=c^2=16$

   $\therefore a=3, b=\sqrt{7}$

   從兩焦點 $(3,-3),(3,5)$ 得知

   雙曲線方程式為 $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{7}=1$

5. (5)$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=4+9+25+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=0$ ， $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-19$

6. (6)$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=3$， $2^a=2\cdot 2^{-a}$

   $\frac{2^b+2^{-b}}{2^b-2^{-b}}=4$， $2^b=\frac{5}{3}\cdot 2^{-b}$， $2^{a+b}=\frac{10}{3}\cdot 2^{-a-b}$

   $f(a+b)=\frac{2^{a+b}+2^{-a-b}}{2^{a+b}-2^{-a-b}}=\frac{13}{7}$

7. (7) $(\sin 100^\circ+i\cos 100^\circ)^{21}=(\cos 10^\circ-i\sin 10^\circ)^{21}=(\cos 210^\circ-i\sin 210^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

   $(a,b)=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

8. (8) $\frac{r}{2}(a+b+c)=\Delta ABC$ 面積 $=\frac{abc}{4R}$

r 為內切圓的半徑， R 為外接圓的半徑

所以 $\frac{abc}{a+b+c}=2Rr=2\times5\times2=20$

9. (9) 令 $x=\sqrt{2}+1$ ，則 $(x-1)^2=2$

因此可以得到 $x^2-2x-1=0$

而 $x^4-6x^3+12x^2-6x+4=(x^2-2x-1)(x^2-4x+5)+9$

所以 $f(x)\div(x-\sqrt{2}-1)=9$

10. (10) $(1+x)^9=C_0^9+C_1^9x+C_2^9x^2+\cdots\cdots+C_9^9x^9$

令 $x=-3$ 代入

$(-2)^9=C_0^9+C_1^9(-3)+C_2^9(-3)^2+\cdots\cdots+C_9^9(-3)^9$

$C_2^9(-3)^2+C_3^9(-3)^3+\cdots\cdots+C_9^9(-3)^9=-512-1+27=-486$

11. (11) $\pi\int_0^1(x-x^2)\,dx=\frac{\pi}{6}$ (12) $\pi\int_0^1((1-x)^2-(1-\sqrt{x})^2)\,dx=\frac{\pi}{6}$

(13) $2\pi\int_0^1 x(\sqrt{x}-x)\,dx=\frac{2\pi}{15}$ (14) $2\pi\int_0^1(1-x)(\sqrt{x}-x)\,dx=\frac{\pi}{5}$

二、判斷

1. 錯誤，反例： $h(x)=\sin x+e^{-x}$ ， $g(x)=\sin x$ ， $f(x)=\sin x-e^{-x}$ 。

$f(x)\le g(x)\le h(x)$ ， $\lim\limits_{x\to\infty}[h(x)-f(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}2e^{-x}=0$ ，

但 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在。

2. 錯誤，反例： $f(x)=\sin(\pi x)$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in N}}\sin(n\pi)=0$ ，但 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(\pi x)$ 不存在。

3. 錯誤，反例： $f(x)=x^2-\frac{7}{4}x+1$ ， $g''(x)=12x^2-\frac{21}{2}x+2$, $g''(\frac{1}{2})<0$

4. 正確， $a>0$ ， $ax^2+bx+1>0$ ， $g''(x)=2[(ax^2+bx+1)\cdot2a+(2ax+b)^2]>0$

三、作圖 10%

1.