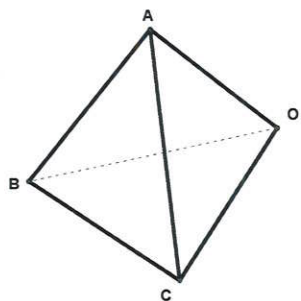


國立彰化高級中學 101 學年度第 1 次教師甄選數學科筆試試題

考試時間：120 分鐘

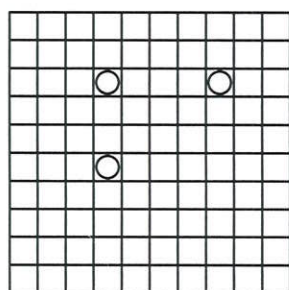
第一部份：填充題(每題 5 分，共 50 分。全對始計分)

1. 如附圖，四面體 O-ABC 中 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{OC} = 5$ ， \overline{AB} 與 \overline{OC} 的公垂線段長為 3，則此四面體的體積為_____。



本題條件不足，逆分

2. 將 3 個 ○ 隨意填入 10×10 的方格中任 3 個相異的方格內，則填入後恰 2 個 ○ 在同一行，恰 2 個 ○ 在同一列 (例如附圖所示) 的機率為_____。



3. 設四次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1) = 2$ ， $f(2) = 4$ ， $f(3) = 1$ ， $f(4) = 3$ ， $f(5) = 5$ ，則 $f(6) =$ _____。
4. 一個抽獎活動依排隊順序抽獎，輪到抽獎的人有一次抽獎機會，抽獎方式為丟擲一枚公正銅板，正面為中獎，反面為沒中獎。獎品有四份，活動直到四份獎品都被抽中為止。則在排第六位的人可以抽獎的情況下，排第七位的人可以抽獎的條件機率為_____。
5. 設 $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，則 $\sum_{k=1}^{9999} a_k =$ _____。
6. 在一個七位數中，若每一出現的數字都至少出現兩次，就稱這種七位數是一個好數。例如：2222222 和 2223323 都是好數，但是 2222223 和 3456777 都不是好數。則所有的七位數中，好數有_____個。

7. 若 $z_k = \cos \frac{k\pi}{12} + i \sin \frac{k\pi}{12}$ ，其中 $k = 0, 1, 2, \dots, 11$ ；若 $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，則 $\sum_{k=0}^{11} |z_k - \omega|^2 =$ _____。

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [(n+2)(n+4) \cdots (n+2n)]^{\frac{1}{n}} =$ _____。

9. 已知 x 為實數，則 $\sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 10x - 24}$ 的最大值為_____。

10. 方程式 $\sqrt[3]{x + \sqrt{8}} - \sqrt[3]{x - \sqrt{8}} = \sqrt{2}$ 的解為_____。

第二部份：計算作圖題 (共 50 分)

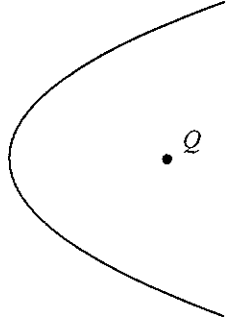
1. 以 O 表坐標平面的原點。給定一點 $A(4,3)$ ，而點 $B(x,0)$ 在正 x 軸上變動。

以 $l(x)$ 表示 \overline{AB} 長，求 $\triangle OAB$ 中兩邊長比值 $\frac{x}{l(x)}$ 的最大值。

(請給出兩種解法：一種是微積分的方法、一種是幾何觀點的方法。)(每種解法 5 分，共 10 分)

2. 附圖是拋物線的一部份， Q 為拋物線之對稱軸上的一點。

試利用尺規作圖的方法，找出此拋物線的焦點。(請作圖並寫出作法)(5 分)



3. 空間中， $x^2 + y^2 = 3^2$ ， $z = 0$ 及 $x - z = 0$ 所圍成封閉區域的體積為何？(7 分)

4. 試求出最小的自然數 n ，使得方程組 $\begin{cases} \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n = 0 \\ \sin x_1 + 2\sin x_2 + \cdots + n\sin x_n = 100 \end{cases}$ 有解。(7 分)

5. $\begin{bmatrix} 2012 \times 2013 & 2013 \times 2014 & 2014 \times 2015 \\ 2013 \times 2014 & 2014 \times 2015 & 2015 \times 2016 \\ 2014 \times 2015 & 2015 \times 2016 & 2016 \times 2017 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ ，求 $x + y + z$ 之值。(7 分)

6. 已知實數數列 a_1, a_2, a_3, \dots 滿足 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ 3a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n, n = 1, 2, \dots \end{cases}$ ，求級數 $\frac{1}{a_1 + 3} + \frac{1}{a_2 + 3} + \cdots + \frac{1}{a_{2012} + 3}$ 之和的整數部分。(7 分)

7. $[]$ 表高斯符號，求 $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1 \times 2} + \sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \times 3} + \sqrt[3]{3^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3 \times 4} + \sqrt[3]{4^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{999^2} + \sqrt[3]{998 \times 999} + \sqrt[3]{1000^2}} \right]$ 之值。(7 分)