國立臺南家齊女子高級中學 103 年教師甄選初試數學科題目卷

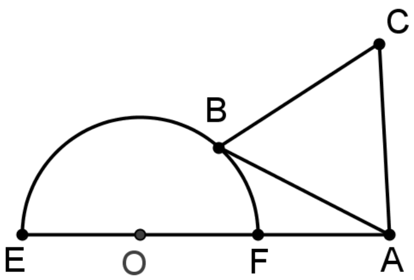
※計算及證明題(配分皆標於各題之後)：

1. 若多項式$P(x)=a_{510}x^{510}+a_{509}x^{509}+a_{508}x^{508}+\cdots+a_1x+a_0$滿足 $x^{512}+x^{256}+1=(x^2+x+1)\cdot P(x)$，試問$a_{510},a_{509},a_{508},\cdots,a_0$有幾個數不為 0？ (6 分)

2. 已知方程式$x^3-2x^2-6x+5=0$三根為α,β,γ，則$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=?$ (6 分)

3. 若S為滿足方程式$\left|\left||x|-2\right|-1\right|+\left|\left||y|-2\right|-1\right|=1$的解在坐標平面所形成的圖形，試求$S$的總長度。 (6 分)

4. 如圖，一半圓的圓心O，定點A在直徑EF的延長線上，B點為半圓周上動點。以$\overline{AB}$為一邊作正三角形ABC，問B在何處時，$\overline{OC}$有最大值。 (10 分)



5. 已知直線$ax+by+c=0$中的 a,b,c 是取自集合{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4}中的 3 個不同元素，並且該直線與 x 軸正向所夾的有向角為銳角，則這樣的直線有幾條? (6 分)

6. 邊長為 a 的正三角形△ABC 中，P、Q 分別為$\overline{AB}$和$\overline{AC}$邊上的一點，若$\overline{PQ}$平分△ABC 之周長，求$\overline{PQ}$之最小值。 (6 分)

7. 設 M 是邊長為 a 的正 n 邊形內部一點，$d_1,\cdots,d_n$表示 M 到 n 個邊的距離。試證：
$\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}+\cdots+\dfrac{1}{d_n}>\dfrac{2\pi}{a}$ (10 分)

8. 設 θ 是固定有向角，L 是有向角 $\dfrac{\theta}{2}$ 的終邊所在之直線，點 P（x，y）對直線 L 鏡射後得

P'（x'，y'），求證$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。(10 分)

9. 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，試求

(1)A 的特徵多項式 (2 分)

(2)試求 A 的最小多項式 (2 分)

(3) $f(x) = x^5 - 7x^4 + 9x^3 + 9x^2 - 7x + 8$，試求 f(A)=? (3 分)

(4)試求一個可逆矩陣 P 使得 PAP^{-1} 為一個對角方陣=? (3 分)

10. 設 $u_n = (1+\dfrac{1}{n})^n (n \in N)$，求證:$< u_n >$為一個收斂數列 (10 分)

11. 若 X 是一個常態隨機變數(normal random variable)且具有參數 μ, σ^2，設 X 的機率密度函數 f(x)=$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (-\infty < x < \infty)$ 求證: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (10 分)

12. 設 A 為實 n 階方陣，且 p(x)為其特徵多項式(characteristic polynomial)，

求證:p(A)=O (O 為零矩陣) (10 分)