

國立臺中女子高級中學 103 學年度第一次教師甄選數學科試題

壹、填充題（每題 5 分）

- 1、若方程式 $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ 之兩根為 α 、 β ，則 $\frac{a^3}{(a-\alpha)(a-\beta)} + \frac{b^3}{(b-\alpha)(b-\beta)} + \frac{c^3}{(c-\alpha)(c-\beta)}$ 之值為_____。
- 2、設 $f(x)$ 為一整係數多項式，滿足 $f(5) = 6, f(12) = 13$ ，若 $f(x) = x + 11$ 有兩相異整數解 α 、 β ，則 $\alpha\beta$ 的最大值為_____。
- 3、設 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，且其三邊長為 $\overline{AB} = 7, \overline{BC} = 6, \overline{AC} = 5$ ，已知 P 點在 \overline{AB} 邊上且 $\overline{AP} = 2$ ，若直線 IP 交 \overline{BC} 邊於 Q 點，則 \overline{QC} 之長為_____。
- 4、有 8 個字母 a, a, b, b, b, c, c, d 排成一列，則同字不相鄰的排法有_____種。
- 5、滿足方程式 $\log_{12}(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \frac{1}{2} \log_9 x$ 的實數解 $x =$ _____。
- 6、若 $\sec x + \tan x = \frac{22}{7}$ ，則 $\csc x + \cot x$ 之值為_____。
- 7、數列 $\{a_n\}$ 的相鄰兩項 a_n, a_{n+1} 是 x 的方程式 $x^2 - c_n x + (\frac{1}{5})^n = 0$ 的兩根，且 $a_1 = 2$ ，則無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n =$ _____。
- 8、設複數 z 為 $(x^{104} + x^{103} + 1)(x^{101} + x^{100} + 1) = 0$ 之一根，且 $|z| = 1$ ，則 $z =$ _____。
- 9、某電視台舉辦抽獎遊戲，籤筒有 15 支籤，其中有 2 支為中獎籤，今由甲、乙、丙三人依序抽籤，規則如下：先由甲一次抽一支籤，取後不放回，至多得連續抽 5 次籤，如果抽到第 k 次 ($1 \leq k \leq 5$) 抽中中獎籤，則停止抽籤，並從籤筒中取出 $(5-k)$ 支未中獎的籤；接著再由乙從剩餘的 10 支籤中繼續抽籤，規則與甲相同；若最後籤筒剩下的 5 支籤中仍有中獎籤，就算丙抽中中獎籤，若最後籤筒剩下的 5 支籤中沒有中獎籤，則視丙為未抽中中獎籤；試求在丙抽中中獎籤的條件下，甲亦抽中中獎籤的機率為_____。
- 10、現有一隻青蛙在一個正三角形的三頂點間跳動，每次跳動可隨機由一頂點跳到其他兩個頂點中的一個。若此青蛙從某一個頂點開始跳動，則經過 12 次跳動後會回到原來的頂點之機率為_____（以最簡分數表示）。
- 11、矩陣 T 將點 $(1, 0), (\sqrt{3}, 1)$ 分別變換至 $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}), (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ ，若 T 將 $P(\sqrt{2}, \sqrt{10})$ 變換至 Q ，且 O 為原點，若 $\triangle OPQ$ 之外接圓方程式為 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$ ，則序組 $(a, b, c) =$ _____。
- 12、在坐標平面上，有一直角 $\triangle ABC$ ，以 $\angle C$ 為直角， $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 為 $\triangle ABC$ 之三中線，已知 \overline{AD} 落在直線 $2x + y = 5$ 上， \overline{BE} 落在直線 $x + 2y = 1$ 上， $\overline{AB} = 30$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為_____。
- 13、於空間中有三點 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$ 及平面 $E: ax - 2ay + z = 0$ (但 $a \neq 0$)，試問當 $a =$ _____時，平面 E 將 $\triangle ABC$ 的面積平分。
- 14、有一橢圓 Γ ，其長軸長為 4，短軸長為 2，橢圓 Γ 內兩等長的弦 \overline{AB} 及 \overline{CD} 將橢圓 Γ 的面積四等分，則 \overline{AB} 之長為_____。
- 15、從 a, b, c 中可以重複任取 n 個字母排成一列，就構成一個長度為 n 的字串。例如： aba, aaa, abc, \dots 等都是相異且長度為 3 的字串，試求長度為 10 且含有奇數個 a 的字串有_____個。
- 16、已知 θ 為實數，則 $\sqrt{\cos^2 \theta + 2\sqrt{2} \cos \theta + 2} + \sqrt{\cos^2 \theta - 4\sqrt{2} \cos \theta + 4\sin \theta + 9}$ 之最大值為_____。

壹、填充題解答

1. $3(a+b+c)$	2. 70	3. $\frac{13}{8}$	4. 384
5. 81	6. $\frac{29}{15}$	7. $\frac{13}{4}$	8. $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
9. $\frac{2}{5}$	10. $\frac{683}{2048}$	11. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}, 3)$	12. 225
13. $\frac{3}{2}$	14. $\sqrt{10}$	15. $\frac{3^{10} - 1}{2}$	16. $2\sqrt{2} + \sqrt{5}$