

國立竹北高中 101 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選 數學 科

參考解答

一、填充題(1-6 題每題 8 分，第 7 題每小題 6 分，共 60 分)

1	2	3	4
$\sqrt{58}-4 \leq \overline{PQ} \leq 7\sqrt{2}+4$	253	$-1 < a < 0$	$\frac{9}{5}\sqrt{17}$
5	6	7(1)	7(2)
$\frac{2\sqrt{d_1^2+d_1d_2+d_2^2}}{\sqrt{3}}$	$\frac{15}{2}$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	(1, 1)

二、計算題(每題 10 分，共 40 分)

1. 令 $g(x) = x \cdot f(x) + 1$ ，則 $g(x)$ 為 2011 次多項式，且 $g(1) = g(2) = \cdots = g(2011) = 0$ ，

由因式定理，可設 $g(x) = a \cdot (x-1)(x-2)\cdots(x-2011)$ ，

$$\because g(0) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{(-1)^{2011} \cdot 2011!} \Rightarrow g(x) = -\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-2011)}{2011!}$$

$$\Rightarrow g(2012) = -1 \Rightarrow f(2012) = \frac{g(2012) - 1}{2012} = -\frac{1}{1006}。$$

2. <解>

$$\text{令 } \overline{AD} = x, \overline{BD} = r,$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EO}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{r}{x} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 - 1^2}} \Rightarrow r = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

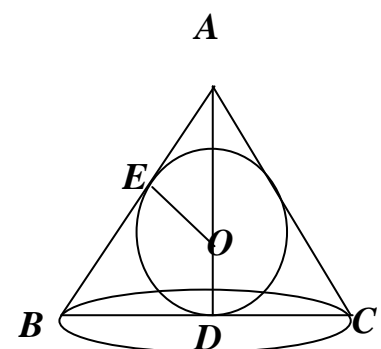
$$\text{圓錐體積} = \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{1}{3} \pi \times \frac{x^2}{x-2}$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{x^2}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

$\because f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 與 $(4, \infty)$ 為遞增函數，在 $(0, 4)$ 為遞減函數

\therefore 當 $x = 4$ 時， $f(x)$ 有最小值 $f(4) = 8$

圓錐體積之最小值為 $\frac{8}{3}\pi$



3.

設第 n 天所使用的密碼分別為 a_n 與 b_n ，根據變換密碼的規則， a_n 與 b_n 會滿足遞迴關係式

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (n \geq 1).$$

從這遞迴關係式可知第 1000 天的手機密碼 a_{1000} 與 b_{1000} 會滿足

$$\begin{bmatrix} a_{1000} \\ b_{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{999} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

因為

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

利用

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{999} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{6 \times 166} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix} a_{1000} \\ b_{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -b_1 \end{bmatrix}.$$

由第 1000 天，此人的 A 手機密碼為 -3 ，B 手機密碼為 -8 知： $a_1 = 3, b_1 = 8$ ，即第一天此人所使用 A 手機密碼為 3 ，B 手機密碼為 8 。

$$4. f(-2) = -8 - 4 - 2a + b \leq 0 \quad \therefore 2a - b \geq -12$$

$$f(-1) = -1 - 1 - a + b \geq 0 \quad \therefore a - b \leq -2$$

$$f(1) = 1 - 1 + a + b \leq 0 \quad \therefore a + b \leq 0$$

$$f(2) = 8 - 4 + 2a + b \geq 0 \quad \therefore 2a + b \geq -4$$

將符合條件 $P(a, b)$ 標是在坐標平面上

$$\text{目標函數 } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^3 - x^2 + ax + b) dx = \frac{-1}{12} + \frac{1}{2}(a + 2b)$$

$$\text{在 } (a, b) = (-4, 4) \text{ 有最大值 } \frac{23}{12} \quad \text{在 } (a, b) = (-2, 0) \text{ 有最小值 } \frac{-13}{12}$$