

一、填充題(每題 7 分，8 題共 56 分)

※請將答案填入答案欄中，否則不予計分

1. 球 S_1 外接於四面體 $ABCD$ ，另一個半徑為 1 的球面 S_2 與平面 ABC 相切，並且 S_1 、 S_2 內切於 D 點，已知 $\overline{AD}=3$ ， $\cos \angle BAC = \frac{4}{5}$ ， $\angle BAD = \angle CAD = 45^\circ$ ，試問四面體 $ABCD$ 的體積為_____。

2. 已知拋物線的頂點在原點，焦點在 x 軸上， $\triangle ABC$ 三個頂點都在拋物線上，且 $\triangle ABC$ 的重心為拋物線的焦點 F ，若 \overline{BC} 邊所在的直線為 $4x + y - 20 = 0$ ，試求拋物線的方程式為_____。

3. 若 x 的 101 次方程式 $x^{101} - 202x^{100} + a_{99}x^{99} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ 有 101 個正實根，對於所有可能的方程式，試求 $\sum_{k=0}^{99} |a_k|$ 的最大值為_____。

4. 在 $1, 2, \dots, 96$ 的直線排列 $(a_1, a_2, \dots, a_{96})$ 中，滿足條件 $(*)$ 的排列共有_____個？

$(*)$: 恰有一個 $i \in \{1, 2, \dots, 95\}$ ，使得
$$\begin{cases} a_1 < a_2 < \dots < a_i \\ a_i > a_{i+1} \\ a_{i+1} < a_{i+2} < \dots < a_{96} \end{cases} \quad \text{成立。}$$

5.設函數 $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ 分別在 x_1 、 x_2 處取得極小值、極大值。在 xy 平面上點 A 、 B 的座標分別為 $(x_1, f(x_1))$ 、 $(x_2, f(x_2))$ ，該平面上動點 P 滿足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4$ ，點 Q 是點 P 關於直線 $y = 2(x - 4)$ 的對稱點，求動點 Q 的軌跡方程為_____。

6.已知複數 $a = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ ，若 $z_n = 1024 a^n$ ，其中 n 為正整數，則絕對值 $|z_9 - z_{11}| =$ _____。

7. 已知
$$\begin{cases} \tan \alpha + \log_3(3 \tan \alpha + 6) = 2 \\ \tan \beta + 3^{\tan \beta - 1} = 4 \end{cases}$$
，求 $\tan \alpha + \tan \beta =$ _____。

8.將 268 個數放在一個圓周上，任意連續的 20 個數字之和都等於 75，且放在第 17 號位置的數為 3，第 83 號位置的數為 4，第 144 號位置的數為 9，則第 210 號位置的數為_____。

答案欄：

1.	2.	3.	4.
5.	6.	7.	8.

二、計算證明題(3 題 共 44 分)

1. 已知銳角 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 R ，且 $\overline{AB} = c = 1$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ ， $\angle BAC = \theta$ ，則：

(1) 證明「正弦定理」： $\frac{a}{\sin \theta} = 2R$ 。(6 分)

(2) 若 $b \leq \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$ ，證明：以 A 、 B 、 C 為圓心，1 為半徑的 3 個圓能覆蓋 $\triangle ABC$ 。(8 分)

2. 已知四面體 $ABCD$, H_a, H_b, H_c, H_d 分別是 $\triangle BCD, \triangle ACD, \triangle ABD, \triangle ABC$ 的垂心, 試問: $\overline{AH_a}, \overline{BH_b}, \overline{CH_c}, \overline{DH_d}$ 四直線相交於一點的充分必要條件是什麼? 並證明之。(15 分)

3. 已知正數 a, b, c 滿足： $5c - 3a \leq b \leq 4c - a$ ， $c \ln b \geq a + c \ln c$ ，求 $\frac{b}{a}$ 的範圍。(15 分)