

# 國立臺中女子高級中學 102 學年度第一學期教師甄選數學科試題

## 壹、填充題（每題 6 分）

- 1、試求  $\sum_{k=0}^{2012} \frac{C_k^{2012}}{C_k^{2013}} - \sum_{k=0}^{2011} \frac{C_k^{2011}}{C_k^{2012}}$  之值為\_\_\_\_\_。
- 2、給定數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_n = 3a_{n-1} - 2(-1)^{n-1}, n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$ 。試問  $a_{102}$  為\_\_\_\_\_位數。(其中  $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$ )
- 3、設  $\omega = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ ,  $f(x) = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^5)(x - \omega^9)(x - \omega^{11})(x - \omega^{13})$ , 則  $f(x)$  除以  $x - 2$  的餘式為\_\_\_\_\_。
- 4、已知  $f(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ , 其中  $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , 則滿足  $f(-4)$  為正整數的函數  $f(x)$  共有\_\_\_\_\_個。
- 5、求由五個平面： $2x + 2y + z = 9$ 、 $x + 2y + 2z = 9$ 、 $x = 0$ 、 $y = 0$  及  $z = 0$  所圍成之立體圖形的體積為\_\_\_\_\_。
- 6、設函數  $y = f(x)$  在  $x = 0$  處沒有定義，但對所有非零實數  $x$  滿足  $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 3x$ 。則方程式  $f(x) = f(-x)$  的解為\_\_\_\_\_。
- 7、在坐標平面上，有一直線  $L$  過點  $P(2, 1)$ ，且與  $x$  軸、 $y$  軸之正向分別交於  $A$ 、 $B$  兩點， $O$  為原點，求  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB}$  之最小值為\_\_\_\_\_。
- 8、已知坐標平面上點  $P_n(x_n, y_n)$ ，滿足  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (7x_n + 3y_n, 3x_n + 7y_n)$ ， $n$  為非負的整數，其中  $(x_0, y_0) = (1 + a, 1 - a)$ ， $a \in R$ ，且  $a \neq 0$ 。若  $O$  表坐標平面的原點，試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \log \overline{OP_n}$  之值為\_\_\_\_\_。
- 9、設  $\triangle ABC$  之三邊長分別為  $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 6, \overline{CA} = 5$ ，若  $H$  為  $\triangle ABC$  之垂心，過  $H$  點做一直線分別交  $\overline{AB}, \overline{AC}$  於  $D$ 、 $E$  兩點，試求  $\triangle ADE$  面積的最小值為\_\_\_\_\_。
- 10、設正立方體中，四條最長的對角線與非零向量  $\vec{v} = (x, y, z)$  之夾角分別為  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\delta$ ，其中  $x$ 、 $y$ 、 $z$  為任意實數，則  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta =$ \_\_\_\_\_。
- 11、 $\frac{3^4 + 2^6}{7^4 + 2^6} \times \frac{11^4 + 2^6}{15^4 + 2^6} \times \frac{19^4 + 2^6}{23^4 + 2^6} \times \frac{27^4 + 2^6}{31^4 + 2^6} \times \frac{35^4 + 2^6}{39^4 + 2^6} \times \frac{43^4 + 2^6}{47^4 + 2^6} =$ \_\_\_\_\_。
- 12、求  $[\frac{10^{2010} + 2011}{10^{670} + 1}]$  的末三位數字為\_\_\_\_\_。(註： $[\ ]$  為高斯符號)

## 壹、填充題解答

1. $\frac{1}{2}$	2. 49	3. 43	4. 1093
5. $\frac{81}{4}$	6. 送分	7. 10	8. 2
9. $\frac{9\sqrt{7}}{49}$	10. $\frac{4}{3}$	11. $\frac{1}{481}$	12. 001