國立新化高級中學 103 學年度 數學科 第 1 次教師甄選 答案卷

一、填充題 I：每題 5 分，共 60 分

1. 設多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1)=0$ ，且對於任意實數 x ，$2f(x)-xf'(x)-1=0$ 恆成立，則 $f(x)=$________。

   Ans: $-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$

2. 空間中兩歪斜線 $L_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$ ，$L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-1}$ 及一點 $A(a,a,a)$ ，若 E_1 為過 A 點且包含 L_1 的平面，E_2 為過 A 點且包含 L_2 的平面，則 $a=$______時，平面 E_1 與 E_2 垂直。

   Ans: 1

3. $<a_n>$、$<b_n>$ 為兩個公差不為 0 的等差數列，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{4}{3}$ ，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{3n}}{nb_n}=$______。

   Ans: 6

4. 對任意實數 x，若函數 $y=f(x)$ 恆滿足 $f(8-x)=f(x)$ ，且方程式 $f(x)=0$ 之實根和為 576，則方程式 $f(x)=0$ 恰有_______個不等實根。

   Ans: 144

5. 設 A 為 700 至 800 之間的偶整數，B 為四位整數，已知 A 對數之尾數為 B 對數之尾數的兩倍，則數對(A,B)=______。

   Ans: (784,2800)

6. 將 $(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^{100}$ 展開後所得的 x 的多項式中，係數為有理數的共有_______項。

   Ans: 17

7. 甲袋中有 1 黑球 2 白球，乙袋中有 1 白球 1 黑球，每球被取到之機會相同，從甲袋中取 1 球放入乙袋，再從乙袋中取 1 球放回甲袋，此叫一回合。試求長期操作後，當達穩定狀態時，甲袋中為 2 黑 1 白球之機率為_______

   Ans: $\frac{3}{10}$

8. 在 xy 平面上,則不等式 $\sqrt{x}\sqrt{y}(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2x-2y+1)\le 0$ 的圖形區域面積為_______

   Ans: $\frac{\pi}{4}+2$

9. 若 $\log_5 144^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}}+2\log_5 144^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10}}+3\log_5 144^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{10}}+\cdots+9\log_5 144^{\frac{1}{10}}=a\log_5 2+b\log_5 3$, 則 $a+b=$________

   Ans: 135

10. a,b,c,x,y,z 均為實數,若 $a^2+b^2+c^2=2, x^2+y^2+z^2=7$,則 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ y+z & z+x & x+y \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 的最大值為_______

    Ans: 28

11. 已知二次方程式 $x^2-(2a+1)x+a+4=0$ 之兩根均為正整數，則整數 $a=$_______

    Ans: a=4 或 2(全對才給分)

12. m 為實數，已知四次方程式 $3x^4-4mx^3+1=0$ 無實根，求 m 的範圍 . _________

    Ans: $-1<m<1$

二、填充題 II：每題 8 分，共 32 分

1. 設 n 爲大於 1 的自然數，若 $f(x)=3x^n-2x+1$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式爲 $r(x)$，商式爲 $q(x)$，則：
   (1) $r(x)=$ ______。(4 分)　　(2) $q(x)=$ ______。(4 分)
   Ans: (1)(3n-2)x-3n+4　　(2) $3(x^{n-2}+2x^{n-3}+3x^{n-4}+\ldots+n-1)$

2. 一骰子丟三次，出現的點數依次爲 a、b、c，則 $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{a+c}{b}+\dfrac{a+b}{c}=6$ 的機率爲 ______。
   Ans: $\dfrac{1}{36}$

3. 方程組 $\begin{cases}(x-a)(a+b)=(a-b)(y-a)\\ \dfrac{x}{a^3-b^3}=\dfrac{y}{a^3+b^3}\quad(ab\neq 0)\end{cases}$ 的解 $(x,y)=$ ______。
   Ans: $(\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b},\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b})$

4. 靶上有 n 個同心圓 C_i ($i=0,1,2,3,\ldots,n$)，C_0 表示這些同心圓的圓心，其半徑分別爲 0、$\dfrac{1}{n}$、$\dfrac{2}{n}$、…、$\dfrac{n}{n}$。射擊一次，若擊中 $C_{i+1}-C_i$ 地帶，則可得 $(n-i)$ 元($i=0,1,2,3,\ldots,n-1$)。假設整個靶面恰分成此 n 個地帶，射中靶面時必落在此 n 個地帶其中之一，則射擊一次(射擊都不會落在靶外)所獲利的期望值爲 ______ 元。
   Ans: $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

三、計算題：每題 8 分，共 8 分

將 $\sin 10^\circ$ 化成小數爲 $\sin 10^\circ=0.abc\cdots$ 則 $a=$？

Ans:

利用三倍角公式(3 分)及勘根定理(3 分)，求出 a=1 (2 分)

<本試題結束>