

臺北市立大安高級工業職業學校 101 學年度第 2 次教師甄選

【數學】筆試試題

作答說明：1.請在彌封之答案卷上標明題號依序作答，答案卷上不得書寫姓名或作任何記號。

2.全卷限用藍色或黑色單一顏色筆作答。

3.作答時間共 90 分鐘。

4.本試題滿分共 100 分，依各題配分計分。

5.交卷時請將試題卷與答案卷一併繳交。

6.請於所發放的答案卷內完成作答，不加發答案卷。

第一部份：偵錯題(每題 6 分，共計 30 分)

說明：此大題為本校學生常犯的錯誤解法，請您找出學生的錯誤，並在答案卷上指出錯誤的關鍵(2 分)，

並寫出正確的詳解(4 分)。

1. 題目：考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ ，其中 $a, b, c \in R$ ， $\det A = 2$ ，求 $\det(A - A^{-1})$ 之值？

天兵學生： $\det(A - A^{-1}) = \det(A) - \det(A^{-1}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

2. 題目：證明 $\log 2 + \log 3 + \log 5$ 是無理數？

天兵學生： $\because \log 2, \log 3, \log 5$ 皆是無理數 $\therefore \log 2 + \log 3$ 是無理數。

3. 題目：已知球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 與平面 $z = 0$ 截一圓，求此圓上與球面 $(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 1$ 之最短距離與最長距離為何？

天兵學生： \because 兩球面外離，且球心距 $= \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2 + (5-0)^2} = 5\sqrt{2}$

\therefore 最短距離 $= 5\sqrt{2} - 3$ ，最長距離 $= 5\sqrt{2} + 3$ 。

4. 題目：試求雙曲線方程式 $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 與橢圓方程式 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 中，二圖形共有幾個交點？

天兵學生：消未知數 y ，聯立二方程式得 $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{x^2}{16} = 2$ ，化簡得 $2x^2 - 2x - 31 = 0$ ， $\therefore x = \frac{1 \pm 3\sqrt{7}}{2}$ ，

而每一個 x 值可對應二個 y 值，因此共有 4 個交點。

5. 題目：邊長均為 2 的正四面體與正四角錐體，若將兩者其兩面正三角形重合疊在一起，則所形成的新多面體共有幾個面？

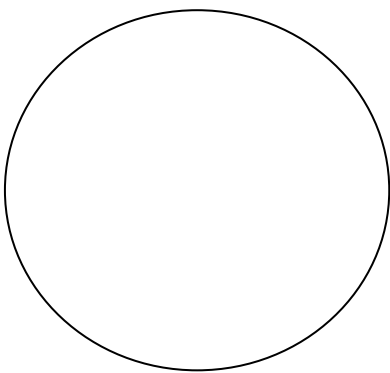
天兵學生： $(4+5) - (1+1) = 7$ 。

【請翻頁繼續作答】

第二部份：填充題(每題 5 分，共計 50 分)

1. 求兩位以上(含兩位)的自然數中，滿足左側數字大於右側數字共有多少個？
2. 正五邊形 ABCDE，設 $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BD} = \bar{b}$ ， $\overline{AC} = x\bar{a} + y\bar{b}$ ，求數對 $(x, y) = ?$
3. 實係數方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 有四虛根，其中二根之積為 $13+i$ ，另二根之和為 $3+4i$ ，則係數 b 值為何？
4. 小天 在計算 $1+2+3+\dots+n$ 時，不小心漏加一數，得到答案是 2012，求漏加的那一個數為何？
5. 設 $x \in R$ ，求 $f(x) = 3x^2 - 6x + 3\sqrt{2x - x^2} + 7$ 的最大值為何？
6. 設 $x, y \in R$ ， $x + y = 2$ ，求 $4^x + 8^y$ 的最小值為何？
7. 設 $\triangle ABC$ 中，三邊長成等差數列且公差為 1，最大角度數為最小角度數的 2 倍，求此三角形的周長為何？
8. 設 $\sum_{k=1}^n a_k = 3n^2$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}} - \sqrt{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}}) = ?$
9. 求 $\frac{1}{C_3^3} + \frac{2}{C_3^4} + \frac{3}{C_3^5} + \dots + \frac{n}{C_3^{n+2}} + \dots = ?$
10. 設 $a \in Z$ ，方程式 $(a-1)x^2 + 2x - a - 1 = 0$ 的解都是整數，請寫出 a 所有可能的值。

第三部份：問答題(每題 10 分，共計 20 分)

1. 如圖，給定一圓及圓內一點，
 - (1) 如何以摺紙的方式摺出一個橢圓的形狀？請以文字描述之。(4 分)
 - (2) 此橢圓的兩焦點為何？(2 分)
 - (3) 摺線是否為橢圓之切線，是的話請證明，不是的話請說明原因。(4 分)
2. 請以高中職的「信賴區間」為範圍，命一個非例行性的單選題，請寫出題目、解答、詳解與學生可能錯誤的做法。

【試題到此結束，祝 您考試順利！】