

金門縣 100 學年度國民中學正式教師暨代理代課教師聯合甄選初試

數學科試題

1. 如果 $2x+1=7$ ，則 $6x+1=?$

- (A) 15 (B) 17 (C) 19 (D) 21

2. 在分式加法算式 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$ 中，則需刪除下列哪二個分式，使得其餘分式的和是 1？

- (A) $\frac{1}{4}$ 與 $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{8}$ 與 $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{6}$ 與 $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{8}$ 與 $\frac{1}{10}$

3. 試問橢圓 $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 11 = 0$ 的正焦弦長為多少？

- (A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 16

4. 設 n 為整數，則滿足 $\frac{n+3}{n-1}$ 為整數的所有可能 n 值的個數為何？

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

5. 計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2}{n+1} \right) = ?$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 不存在

6. 設 a 為實數，如果 $A = \left(\frac{\sqrt{|a|-3} + \sqrt{3-|a|}}{3-a} + \frac{2a}{1+a} \right)^{200}$ ，則 A 的個位數字為多少？

- (A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 9

7. 如圖，一半圓內切於一等腰直角三角形，如果此三角形的股長為 2，則此半圓的直徑為何？

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $3 - \sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{2} - 4$ (D) $2\sqrt{2}$

8. 有一本書的頁碼為 $1, 2, 3, \dots, n$ (其中 $n > 1$ 為正整數)，小強將這些數相加，但不小心將某一頁碼數多加一次，得到和為 2011，則此多加一次的頁碼數為何？

- (A) 55 (B) 56 (C) 57 (D) 58

9. 設 V 為一個 n 維向量空間，下列何者恆為不正確？

- (A) 如果有 n 個向量能生成 (span) V ，則此 n 個向量必構成 V 的基底。
(B) 任意 $n+1$ 個向量必為線性相依
(C) 任意 n 個向量必為線性獨立
(D) 任意 $n-1$ 個向量必不能生成 V

10. 設 $f(n)$ 表示正整數 n 之最大奇因數，例如 $f(3) = 3, f(10) = 5$ ，則 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(60)$

- 之值為何？ (A) 844 (B) 924 (C) 1688 (D) 1848

11. 下列敘述中何者恆為正確？

- (A) 函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 處為可微
- (B) 函數 $f(x) = |x|$ 在 $x=0$ 處可微

- (C) 如果級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ 收斂，則 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 與 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都收斂
- (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$ 必為收斂級數

12. 設 θ 為實數，已知函數 $f(x) = \sin(2x + \theta) + 2\sqrt{3} \cos^2(x + \frac{\theta}{2}) - \sqrt{3}$ ，則函數 $f(x)$ 的週期為何？

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

13. 設 n 為正整數，如果 $2000 < C_1^n + C_2^n + C_3^n + \dots + C_n^n < 3000$ ，則 $n = ?$

- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 不存在

15. 方程式 $\sqrt[4]{x} = \frac{6}{7 - \sqrt[4]{x}}$ 的所有正實數解 x 的和為多少？

- (A) 7 (B) 37 (C) 259 (D) 1297

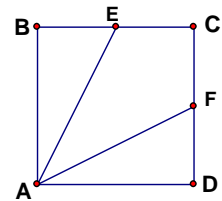
16. 計算： $\log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \dots + \log(\tan 88^\circ) + \log(\tan 89^\circ) = ?$

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (C) $\frac{1}{2} \log 2$ (D) 1

17. 正方形 $ABCD$ 中， E, F 分別為邊 \overline{BC} 與 \overline{CD} 的中點（如圖所示），則

$\sin \angle EAF =$

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$



18. 已知實數 a, b 滿足條件 $ab = 7$ 與 $a^2b + ab^2 + a + b = 72$ ，則 $a^2 + b^2 = ?$

- (A) 67 (B) 65 (C) 61 (D) 50

19. 計算 $\log_{2011}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \log_{2010}\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \log_{2009}\left(\frac{1}{4}\right) \cdots \log_2\left(\frac{1}{2011}\right) = ?$

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

20. 令函數 $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ ，其中 x 為任意正實數。如果函數 g 為函數 $f(x)$ 的反函數，則 $g'(0) = ?$

- (A) 0 (B) $\frac{1}{8}$ (C) 1 (D) 8

21. $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 75^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$ ，如果 P 為 \overline{BC} 上的點使得 $\overline{BP} = 2\overline{PC}$ ，則 $\angle APB$ 的度數為幾度？
 (A) 45° (B) 60° (C) 75° (D) 90°
22. 設 p 為質數，如果方程式 $x^2 + px - 444p = 0$ 有二個整數解，則 p 值為何？
 (A) 2 (B) 3 (C) 11 (D) 37
23. 計算 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = ?$
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 不存在
24. 試問由圖形 $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ 與 $x = 1$ 所包圍區域的面積為多少？
 (A) $\frac{7}{6}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{17}{6}$ (D) 3
25. 設 p, q 為質數，如果 $p + q$ 和 $p + 7q$ 都是完全平方數 (即某整數的平方)，則 $p^2 + q^2$ 之值為何？
 (A) 8 (B) 13 (C) 18 (D) 29
26. 已知一個二位數被 7 除餘 1，如果將此數的十位數字與個位數字互換位置，所得到新的二位數被 7 除也餘 1，那麼滿足這樣條件的二位數共有多少個？
 (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
27. 試問 $17^{103} + 3$ 的個位數字是多少？
 (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6
28. 已知拋物線 $y^2 = 4x$ 及一點 $P(2, 1)$ ，則 P 點距此拋物線之最短距離為何？
 (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2
29. 設 a, b, c 為相異的正整數，如果 $a^2 + b^2 = c^3$ ，則 $a + b + c$ 的最小值為何？
 (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 32
30. 下列何者恆為不正確？
 (A) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ 為 $M_{2 \times 2}(\square)$ 的基底。
 (B) $\{(2, -1, 0, 3), (1, 2, 5, -1), (7, -1, 5, 8)\}$ 必為線性獨立。
 (C) $\{(2, -1, 4), (3, 6, 2), (2, 10, -4)\}$ 必為線性獨立。
 (D) $\{(6, 0, -1), (1, 1, 4)\}$ 必為線性獨立。
31. 已知三實數 a, b, c 滿足 $\sqrt{3}(a-b) + 3(b-c) + (c-a) = 0$ ，且 $b \neq c$ ，則 $\frac{(a-b)(a-c)}{(b-c)^2}$ 之值為何？

- (A) $\sqrt{3}$ (B) 3 (C) $3+\sqrt{3}$ (D) 6

32. 已知方程式 $z^6 + z^3 + 1 = 0$ 有一個複數根，其幅角 θ 滿足 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ，則 θ 的度數為下列何者？

- (A) 100° (B) 120° (C) 135° (D) 160°

33. 已知正整數 m, n 滿足 $\log_9 m = \log_{15} n = \log_{25}(m+n)$ ，則 $\frac{n}{m} = ?$

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$

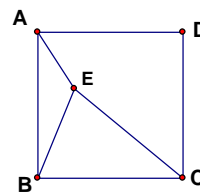
34. 設 $M_{n \times n}(\square)$ 表示 n 階方陣所成得集合 ($n > 1$)，且令 $A, B, C \in M_{n \times n}(\square)$ ， A' 為 A 的轉置矩陣

(transpose)等，則下列何者恆為正確？

- (A) 若 $AB = AC$ ，則 $B = C$ 。 (B) $\det(A') = \det(A)$ 。
 (C) $\det(kA) = k \det(A)$ 。 (D) $(AB)' = A'B'$ 。

35. 如圖， E 為正方形 $ABCD$ 內部一點，使得 $\overline{AE} = 2, \overline{BE} = 4, \overline{CE} = 6$ ，則 $\angle AEB$ 的度數為幾度？

- (A) 90° (B) 105° (C) 120° (D) 135°



36. 令 $V = \{(a, b, a+b, a-b) \in \square^4 \mid a, b \in \square\}$ ，則 $\dim V = ?$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

37. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 5, 7, 及 8，則此三角形的外接圓半徑為多少？

- (A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ (D) $10\sqrt{3}$

38. 已知圓 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ 及圓外一點 $P(-2, -2)$ ，則過點 P 作此圓的切線段長為多少？

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

39. 設袋中有 100 個球，分別編號為 1, 2, 3, ..., 100，今從袋中任取出一球，假設每一個球被取出的機會都相等，則取到球號與 15 互質之機率為何？

- (A) $\frac{47}{100}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{13}{25}$ (D) $\frac{53}{100}$

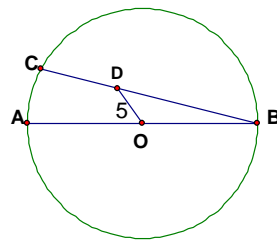
40. 試問方程式 $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$ 共有多少個整數解 x ？

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

41. 已知 $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ，則下列何者不正確？

- (A) $z_1^7 + z_2^7 = -1$ (B) $z_1^9 + z_2^9 = -1$ (C) $z_1^{11} + z_2^{11} = -1$ (D) $z_1^{13} + z_2^{13} = -1$

42. 如圖， \overline{AB} 為圓 O 的一條直徑， O 為圓心，在弦 \overline{BC} 上取一點 D ，使得



$\angle BDO = \angle AOC = 60^\circ$ ， $\overline{OD} = 5$ ，則 $\overline{CD} = ?$

- (A) 4 (B) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (C) $3 + \sqrt{3}$ (D) 5

43. 試求最小的正整數 n ，滿足分式 $\frac{n-13}{5n+6}$ 為異於零的非最簡分式（即可約分）？

- (A) 84 (B) 68 (C) 56 (D) 14

44. 試求無窮級數 $1 + 2 \times \left(\frac{1}{2011}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{2011}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2011}\right)^3 + 5 \times \left(\frac{1}{2011}\right)^4 + \dots$ 之值。

- (A) $\left(\frac{2011}{2010}\right)^3$ (B) $\left(\frac{2011}{2010}\right)^2$ (C) $\left(\frac{2010}{2011}\right)^2$ (D) $\frac{2011}{2010}$

45. 已知 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ，若 $\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{5}{3}$ ，則 $\frac{\cos 3x}{\cos x}$ 的值為何？

- (A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{11}{3}$

46. 已知實數 $m \neq 2$ ，如果方程式 $(m-2)x^2 + (m^2 - 4m + 3)x - (6m^2 - 2) = 0$ 有二實根，且此二根的立方和為 0，則 m 值為何？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

47. 令 $f(n)$ 是表示在十進位制的情況下從 1 到 n 這 n 個數的數字中出現 1 的次數，例如：
 $f(8) = 1$ ， $f(9) = 1$ ， $f(10) = 2$ ， $f(11) = 4$ 且 $f(12) = 5$ ，則 $f(1000)$ 的值為何？

- (A) 299 (B) 300 (C) 301 (D) 401

48. 試問 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{kn^2}{(n^2 + k^2)^2}$ 的值為何？

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$

49. 下列何者是正確？

- (A) $5^{56} < 31^{28} < 17^{35} < 10^{51}$
 (B) $5^{56} < 17^{35} < 10^{51} < 31^{28}$
 (C) $5^{56} < 10^{51} < 17^{35} < 31^{28}$
 (D) $17^{35} < 5^{56} < 10^{51} < 31^{28}$

50. 矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 的所有特徵根(eigenvalues)的和為多少？

- (A) 0 (B) $2\sqrt{3}$ (C) $4 + 2\sqrt{3}$ (D) 8

金門縣 100 學年度國民中學正式教師暨代理代課教師聯合甄選初試

數學科答案

單一選擇題（共 50 題，每題 2 分，共 100 分）

題號	答案	題號	答案	題號	答案	題號	答案	題號	答案
1.	C	11.	A	21.	B	31.	C	41.	B
2.	D	12.	C	22.	D	32.	D	42.	D
3.	A	13.	B	23.	A	33.	B	43.	A
4.	B	14.	B	24.	C	34.	B	44.	B
5.	B	15.	D	25.	A	35.	D	45.	A
6.	A	16.	A	26.	A	36.	B	46.	C
7.	C	17.	B	27.	D	37.	C	47.	C
8.	D	18.	A	28.	B	38.	B	48.	A
9.	C	19.	A	29.	B	39.	D	49.	A
10.	A	20.	B	30.	B	40.	C	50.	D

100 學年度金門教師聯合甄選數學科試題（參考解答）

1. 如果 $2x+1=7$ ，則 $6x+1=?$

- (A) 15 (B) 17 (C) 19 (D) 21

【參考解答】 Ans: (C)

2. 在分式加法算式 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$ 中，則需刪除下列哪二個分式，使得其餘分式的和是 1？

- (A) $\frac{1}{4}$ 與 $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{8}$ 與 $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{6}$ 與 $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{8}$ 與 $\frac{1}{10}$

【參考解答】 Ans: (D)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{60 + 30 + 20 + 15 + 12 + 10}{120} = 1 + \frac{10}{120}$$

3. 試問橢圓 $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 11 = 0$ 的正焦弦長為多少？

- (A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 16

【參考解答】 Ans: (A)

原式可化為 $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ ，所以正焦弦長為 $\frac{2b^2}{a} = 2$

4. 設 n 為整數，則滿足 $\frac{n+3}{n-1}$ 為整數的所有可能 n 值的個數為何？

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

【參考解答】 Ans: (B)

$$\because \frac{n+3}{n-1} = 1 + \frac{4}{n-1} \Rightarrow n-1 \mid 4 \Rightarrow n-1 = \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

5. 計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2}{n+1} \right) = ?$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 不存在

【參考解答】 Ans: (B)

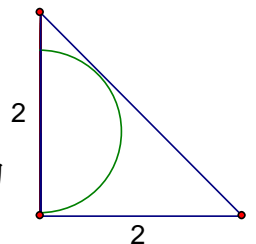
6. 設 a 為實數，如果 $A = \left(\frac{\sqrt{|a|-3} + \sqrt{3-|a|}}{3-a} + \frac{2a}{1+a} \right)^{200}$ ，則 A 的個位數字為多少？

- (A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 9

【參考解答】 Ans: (A)

$$a = -3, \therefore A = \left(\frac{-6}{-2} \right)^{200} = 3^{200}, \text{ A 的個位數字為 1.}$$

7. 如圖，一半圓內切於一等腰直角三角形，如果此三角形的股長為 2，則此半圓的直徑為何？



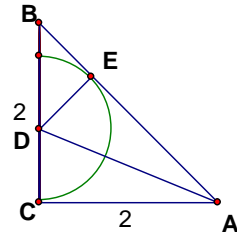
- (A) $\sqrt{2}$ (B) $3-\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{2}-4$ (D) $2\sqrt{2}$

【參考解答】 Ans: (C)

如右圖，點 D 為此半圓的圓心， E 為切點，

$$\text{所以 } \overline{AE} = \overline{AC} = 2, \overline{DE} = \overline{BE} = 2\sqrt{2} - 2$$

故直徑為 $4\sqrt{2} - 4$ 。



8. 有一本書的頁碼為 $1, 2, 3, \dots, n$ (其中 $n > 1$ 為正整數)，小強將這些數相加，但不小心將某一頁碼數多加一次，得到和為 2011，則此多加一次的頁碼數為何？

- (A) 55 (B) 56 (C) 57 (D) 58

【參考解答】 Ans: (D)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + k = 2011 \Rightarrow n(n+1) + 2 \leq 4022 \leq n(n+1) + 2n \Rightarrow n = 62$$

故此多加一次的頁碼 $k = 58$ 。

9. 設 V 為一個 n 維向量空間，下列何者恆為不正確？

- (A) 如果有 n 個向量能生成 (span) V ，則此 n 個向量必構成 V 的基底。
 (B) 任意 $n+1$ 個向量必為線性相依 (C) 任意 n 個向量必為線性獨立
 (D) 任意 $n-1$ 個向量必不能生成 V

【參考解答】 Ans: (C)

10. 設 $f(n)$ 表示正整數 n 之最大奇因數，例如 $f(3) = 3, f(10) = 5$ ，則 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50)$

之值為何？ (A) 844 (B) 924 (C) 1688 (D) 1848

【參考解答】 Ans: (A)。先分奇、偶數來討論：

如果 n 為奇數，則 $f(n) = n$ ；

如果 n 為偶數，則可發現規則

$$f(n)=1, n=2,4,8,16,32$$

$$f(n)=3, n=6,12,24,48$$

$$f(n)=5, n=10,20,40 \text{ 依此類推，}$$

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(50)$

$$=[f(1)+f(3)+f(5)+\dots+f(49)]+[f(2)+f(4)+f(6)+\dots+f(50)]$$

$$=(1+3+5+\dots+49)+(1 \times 5 + 3 \times 4 + 5 \times 3 + 7 \times 2 + 9 \times 2 + 11 \times 2 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25)$$

$$=844$$

11. 下列敘述中何者恆為正確？

- (A) 函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 處為可微 (B) 函數 $f(x) = |x|$ 在 $x=0$ 處可微

(C) 如果級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ 收斂，則 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 與 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都收斂 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$ 必為收斂級數

【參考解答】：Ans: (A)。

12. 設 θ 為實數，已知函數 $f(x) = \sin(2x + \theta) + 2\sqrt{3} \cos^2(x + \frac{\theta}{2}) - \sqrt{3}$ ，則函數 $f(x)$ 的週期為何？(A)

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

【參考解答】：Ans: (C)。

$$\because \cos^2(x + \frac{\theta}{2}) = \frac{1 + \cos(2x + \theta)}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \sin(2x + \theta) + 2\sqrt{3} \cos^2(x + \frac{\theta}{2}) - \sqrt{3} = \sin(2x + \theta) + 2\sqrt{3} \cdot \frac{1 + \cos(2x + \theta)}{2} - \sqrt{3} \\ &= \sin(2x + \theta) + \sqrt{3} \cos(2x + \theta) = 2\sin(2x + \theta + \frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

，所以週期為 π

13. 設 n 為正整數，如果 $2000 < C_1^n + C_2^n + C_3^n + \dots + C_n^n < 3000$ ，則 $n = ?$

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

【參考解答】：Ans: (B)

$$2000 < C_1^n + C_2^n + C_3^n + \dots + C_n^n = 2^n - 1 < 3000 \Rightarrow n = 11$$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 不存在

【參考解答】：Ans: (B)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

15. 方程式 $\sqrt[4]{x} = \frac{6}{7 - \sqrt[4]{x}}$ 的所有正實數解 x 的和為多少？

(A) 7 (B) 37 (C) 259 (D) 1297

【參考解答】：Ans: (D)。

$$\text{令 } y = \sqrt[4]{x} \text{，原式化簡為 } y^2 - 7y + 6 = 0 \Rightarrow y = 1, 6$$

故所有正實數解 x 為 $1, 6^4 = 1296$

16. 計算： $\log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \dots + \log(\tan 88^\circ) + \log(\tan 89^\circ) = ?$

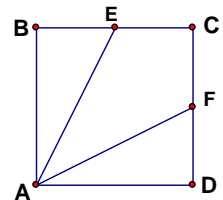
- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (C) $\frac{1}{2}\log 2$ (D) 1

【參考解答】：Ans:(A)

$\log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \cdots + \log(\tan 88^\circ) + \log(\tan 89^\circ)$
 $= \log[(\tan 1^\circ) \cdot (\tan 89^\circ)] \cdot [(\tan 2^\circ) \cdot (\tan 88^\circ)] \cdot [(\tan 3^\circ) \cdot (\tan 87^\circ)] \cdots [(\tan 44^\circ) \cdot (\tan 46^\circ)] \cdot \tan 45^\circ$
 因為 $\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ = \tan 1^\circ \cdot \cot 1^\circ = 1$ ，同理 $\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ = 1 = \tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ$ 依此類推，
 故原式 $\log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \cdots + \log(\tan 88^\circ) + \log(\tan 89^\circ) = \log(\tan 45^\circ) = 0$ 。

17. 正方形 $ABCD$ 中， E, F 分別為邊 \overline{BC} 與 \overline{CD} 的中點，則 $\sin \angle EAF = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$



【參考解答】：Ans: (B)。

$$\sin \angle EAF = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\angle EAD\right) = \cos 2\angle EAD = 2\cos^2 \angle EAD - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \frac{3}{5}$$

18. 已知實數 a, b 滿足條件 $ab = 7$ 與 $a^2b + ab^2 + a + b = 72$ ，則 $a^2 + b^2 = ?$

- (A) 67 (B) 65 (C) 61 (D) 50

【參考解答】：Ans: (A)。

$$\because 72 = a^2b + ab^2 + a + b = (ab + 1)(a + b) = 8(a + b) \Rightarrow a + b = 9$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 81 - 14 = 67$$

19. 計算 $\log_{2011}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \log_{2010}\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \log_{2009}\left(\frac{1}{4}\right) \cdots \log_2\left(\frac{1}{2011}\right) = ?$

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

【參考解答】：Ans: (A)

20. 令函數 $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ ，其中 x 為任意正實數。如果函數 g 為函數 $f(x)$ 的反函數，則 $g'(0) = ?$

- (A) 0 (B) $\frac{1}{8}$ (C) 1 (D) 8

【參考解答】：Ans: (B)

$$\because g(f(x)) = x \Rightarrow g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad , \quad \text{又} \quad f(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad (\text{負的不合})$$

$$\text{所以} \quad g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{8} \text{。}$$

21. $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 75^\circ$ ， $\angle BCA = 45^\circ$ ，如果 P 為 \overline{BC} 上的點使得 $\overline{BP} = 2\overline{PC}$ ，則 $\angle APB$ 的度數為幾度？

- (A) 45° (B) 60° (C) 75° (D) 90°

【參考解答】：Ans: (B)。

設 $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$, 利用正弦定理, $\triangle ABC$ 中, $\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

$$\therefore \overline{BP} = \frac{2}{3}a, \therefore \frac{\overline{BP}}{c} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{c}{a}, \therefore \triangle BPA \sim \triangle BAC$$

故 $\angle APB = \angle BAC = 60^\circ$ 。

22. 設 p 為質數, 如果方程式 $x^2 + px - 444p = 0$ 有二個整數解, 則 p 值為何?

- (A) 2 (B) 3 (C) 11 (D) 37

【參考解答】：Ans: (D)。

由題意知, 判別式 $p^2 + 4 \cdot p \cdot 444 = p(p + 1776)$ 為完全平方數,

所以 $p | p + 1776 \Rightarrow p | 1776, 1776 = 2^4 \times 3 \times 37 \Rightarrow p = 2, 3, 37$ (2 及 3 不合)

故 $p = 37$ 。

23. 計算 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = ?$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 不存在

【參考解答】：Ans: (A)。

24. 試問由圖形 $y = x^2 + 2, y = -x, x = 0$ 與 $x = 1$ 所包圍區域的面積為多少?

- (A) $\frac{7}{6}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{17}{6}$ (D) 3

【參考解答】：Ans: (C)。
 $A = \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)] dx = \frac{17}{6}$

25. 設 p, q 為質數, 如果 $p + q$ 和 $p + 7q$ 都是完全平方數 (即某整數的平方), 則 $p^2 + q^2$ 之值為何?

- (A) 8 (B) 13 (C) 18 (D) 29

【參考解答】：Ans: (A)。

令 $p + q = x^2, p + 7q = y^2 \Rightarrow 6q = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$

因為 $6q$ 是偶數, 所以 $(y - x)(y + x)$ 為偶數, 即 $y - x, y + x$ 都是偶數, $\therefore 4 | 6q \Rightarrow q$ 必為偶數,

$\therefore q = 2 \Rightarrow 12 = (y - x)(y + x) \Rightarrow y - x = 2, y + x = 6 \Rightarrow y = 4, x = 2 \therefore p^2 + q^2 = 8$

26. 已知一個二位數被 7 除餘 1, 如果將此數的十位數字與個位數字互換位置, 所得到新的二位數被 7 除也餘 1, 那麼滿足這樣條件的二位數共有多少個?

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

【參考解答】：Ans: (A)

22, 29, 92, 99 共 4 個。

27. 試問 $17^{103} + 3$ 的個位數字是多少?

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6

【參考解答】：Ans: (D)

28. 已知拋物線 $y^2 = 4x$ 及一點 $P(2,1)$ ，則 P 點距此拋物線之最短距離為何？

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

【參考解答】：Ans:(B)

$$\text{令 } d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \Rightarrow d^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{y^2}{4} - 2\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{y^4}{16} - 2y + 5 = f(y)$$

$$\therefore f'(y) = \frac{1}{4}(y^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow y = 2, \text{ 所以最短距離爲 } \sqrt{2}$$

29. 設 a, b, c 為相異的正整數，如果 $a^2 + b^2 = c^3$ ，則 $a + b + c$ 的最小值為何？

- (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 32

【參考解答】 Ans:(B) $a + b + c = 11 + 2 + 5 = 18$

不妨假設 $a > b$ ，如果 $c = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = 125 \Rightarrow (a, b) = (10, 5), (11, 2)$

如果 $c > 5 \Rightarrow a > 22 \Rightarrow a + b + c > 32$

30. 下列何者恆為不正確？

(A) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ 為 $M_{2 \times 2}(\square)$ 的基底。

(B) $\{(2, -1, 0, 3), (1, 2, 5, -1), (7, -1, 5, 8)\}$ 必為線性獨立。

(C) $\{(2, -1, 4), (3, 6, 2), (2, 10, -4)\}$ 必為線性獨立。

(D) $\{(6, 0, -1), (1, 1, 4)\}$ 必為線性獨立

【參考解答】 Ans: (B)

31. 已知三實數 a, b, c 滿足 $\sqrt{3}(a-b) + 3(b-c) + (c-a) = 0$ ，且 $b \neq c$ ，則 $\frac{(a-b)(a-c)}{(b-c)^2}$ 之值為何？

- (A) $\sqrt{3}$ (B) 3 (C) $3 + \sqrt{3}$ (D) 6

【參考解答】 Ans: (C)

$\therefore x = 1, \sqrt{3}$ 為一元二次方程式 $(b-c)x^2 + (a-b)x + (c-a) = 0$ 的二根，

利用根與係數性質，知 $\frac{a-b}{b-c} = -(1 + \sqrt{3}), \frac{c-a}{b-c} = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore \frac{(a-b)(a-c)}{(b-c)^2} = \frac{a-b}{b-c} \cdot \frac{a-c}{b-c} = (1 + \sqrt{3})\sqrt{3} = \sqrt{3} + 3$$

32. 已知方程式 $z^6 + z^3 + 1 = 0$ 有一個複數根，其幅角 θ 滿足 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ，則 θ 的度數為下列何者？

- (A) 100° (B) 120° (C) 135° (D) 160°

【參考解答】：Ans: (D)。 $z^9 = 1 \Rightarrow z_k = \cos \frac{2k\pi}{9} + i \sin \frac{2k\pi}{9}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, 8 \Rightarrow \theta = 160^\circ$

(因爲 z_3 爲 $z^3 - 1 = 0$ 的解，故不合。)

33. 已知正整數 m, n 滿足 $\log_9 m = \log_{15} n = \log_{25}(m+n)$ ，則 $\frac{n}{m} = ?$

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$

【參考解答】：Ans:(B)

令 $\log_9 m = \log_{15} n = \log_{25}(m+n) = r \Rightarrow m = 9^r, n = 15^r, m+n = 25^r = 9^r + 15^r$

$$\Rightarrow \frac{n}{m} = \left(\frac{5}{3}\right)^r, \left(\frac{5}{3}\right)^r = \frac{9^r + 15^r}{9^r} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

34. 設 $M_{n \times n}(\square)$ 表示 n 階方陣所成得集合 ($n > 1$)，且令 $A, B, C \in M_{n \times n}(\square)$ ， A^t 爲 A 的轉置矩陣

(transpose)等，則下列何者恆爲正確？

- (A) 若 $AB = AC$ ，則 $B = C$ 。
 (B) $\det(A^t) = \det(A)$ 。
 (C) $\det(kA) = k \det(A)$ 。
 (D) $(AB)^t = A^t B^t$ 。

【參考解答】 Ans: (B)

35. 如圖， E 爲正方形 $ABCD$ 內部一點，使得 $\overline{AE} = 2, \overline{BE} = 4, \overline{CE} = 6$ ，則 $\angle AEB$ 的度數爲幾度？

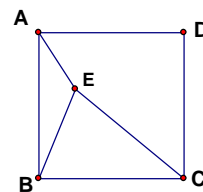
- (A) 90° (B) 105° (C) 120° (D) 135°

【參考解答】 Ans: (D)

36. 令 $V = \{(a, b, a+b, a-b) \in \square^4 \mid a, b \in \square\}$ ，則 $\dim V = ?$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【參考解答】 Ans:(B)



37. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長分別爲 5, 7, 及 8，則此三角形的外接圓半徑爲多少？

- (A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ (D) $10\sqrt{3}$

【參考解答】：Ans:(C)

$$\because s = \frac{5+7+8}{2} = 10 \Rightarrow \Delta = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = 10\sqrt{3}$$

$$\text{又 } \Delta = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

38. 已知圓 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ 及圓外一點 $P(-2, -2)$ ，則過點 P 作此圓的切線段長爲多少？

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

【參考解答】： Ans:(B)

39. 設袋中有 100 個球，分別編號為 1, 2, 3, ..., 100，今從袋中任取出一球，假設每一個球被取出的機會都相等，則取到球號與 15 互質之機率為何？

- (A) $\frac{47}{100}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{13}{25}$ (D) $\frac{53}{100}$

【參考解答】： Ans:(D)

$$n(A \cup B) = 33 + 20 - 6 = 47 \Rightarrow P(A' \cap B') = \frac{100 - 47}{100} = \frac{53}{100}$$

40. 試問方程式 $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$ 共有多少個整數解 x ？

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

【參考解答】： Ans:(C)

(1) 如果 $x+2=0, x^2-x-1 \neq 0 \Rightarrow x=-2$

(2) 如果 $x^2-x-1=1 \Rightarrow x=-1, 2$

(3) 如果 $x^2-x-1=-1$ 且 $x+2$ 為偶數，所以 $x=0$ ($x=1$ 不合)

41. 已知 $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ，則下列何者不正確？

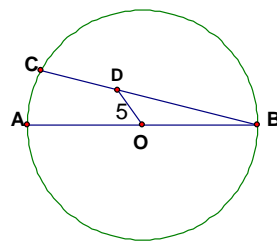
- (A) $z_1^7 + z_2^7 = -1$ (B) $z_1^9 + z_2^9 = -1$ (C) $z_1^{11} + z_2^{11} = -1$ (D) $z_1^{13} + z_2^{13} = -1$

【參考解答】： Ans:(B)

$$\because z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_1^3 = z_2^3 = 1, \text{ 且 } z_1 + z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -1$$

$$z_1^2 + z_2^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -1。$$

42. 如圖， \overline{AB} 為圓 O 的一條直徑， O 為圓心，在弦 \overline{BC} 上取一點 D ，使得



$\angle BDO = \angle AOC = 60^\circ$ ， $\overline{OD} = 5$ ，則 $\overline{CD} = ?$

- (A) 4 (B) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (C) $3+\sqrt{3}$ (D) 5

【參考解答】： Ans:(D)

$\triangle COB$ 為等腰三角形，因此 $\angle COD = 30^\circ \Rightarrow \overline{CD} = \overline{DO} = 5$ 。

43. 試求最小的正整數 n ，滿足分式 $\frac{n-13}{5n+6}$ 為異於零的非最簡分式（即可約分）？

- (A) 84 (B) 68 (C) 56 (D) 14

【參考解答】： Ans:(A)

$$\frac{5n+6}{n-13} = 5 + \frac{71}{n-13} \Rightarrow n-13 \mid 71, \text{ 所以最小的正整數 } n = 84$$

44. 試求無窮級數 $1 + 2 \times \left(\frac{1}{2011}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{2011}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2011}\right)^3 + 5 \times \left(\frac{1}{2011}\right)^4 + \dots$ 之值。

- (A) $\left(\frac{2011}{2010}\right)^3$ (B) $\left(\frac{2011}{2010}\right)^2$ (C) $\left(\frac{2010}{2011}\right)^2$ (D) $\frac{2011}{2010}$

【參考解答】：Ans:(B)。令

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \Rightarrow f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \\ \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2011}\right) &= 1 + 2 \times \left(\frac{1}{2011}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{2011}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2011}\right)^3 + 5 \times \left(\frac{1}{2011}\right)^4 + \dots \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2011}\right) = \left(\frac{2011}{2010}\right)^2 \end{aligned}$$

45. 已知 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ，若 $\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{5}{3}$ ，則 $\frac{\cos 3x}{\cos x}$ 的值為何？

- (A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{11}{3}$

【參考解答】：Ans:(A)

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = -4\sin^2 + 3 \dots (1) \qquad \frac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos^2 - 3 \dots (2)$$

因(1)-(2)得 $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = -4\sin^2 + 3 - (4\cos^2 - 3) = 2$ 。故 $\frac{\cos 3x}{\cos x} = -2 + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$

46. 已知實數 $m \neq 2$ ，如果方程式 $(m-2)x^2 + (m^2 - 4m + 3)x - (6m^2 - 2) = 0$ 有二實根，且此二根的立方和為 0，則 m 值為何？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【參考解答】Ans:(C)。設 $a, b \in \square$ 為方程式的二根，

則 $a^3 + b^3 = 0 \Leftrightarrow a^3 = -b^3 = (-b)^3 \Leftrightarrow a = -b \Rightarrow a + b = 0$ ，所以二根和為 0。因此

$$x^2 + \frac{m^2 - 4m + 3}{m - 2} \cdot x - \frac{6m^2 - 2}{m - 2} = 0 \Rightarrow -\frac{m^2 - 4m + 3}{m - 2} = 0 \quad (\text{二根之和為零})$$

$$\Rightarrow (m-1)(m-3) = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ 或 } 3$$

若 $m = 1$ ，則方程式為 $-x^2 - 4 = 0$ (無實根，不合)

若 $m = 3$ ，則方程式為 $x^2 - 52 = 0$ ， $x = \pm\sqrt{52}$ ，所以 $m = 3$ 。

47. 令 $f(n)$ 是表示在十進位制的情況下從 1 到 n 這 n 個數的數字中出現 1 的次數，例如：
 $f(8) = 1$ ， $f(9) = 1$ ， $f(10) = 2$ ， $f(11) = 4$ 且 $f(12) = 5$ ，則 $f(1000)$ 的值為何？

- (A) 299 (B) 300 (C) 301 (D) 401

【參考解答】： Ans:(C)。

先討論 $f(x)$ ，其中 x 的值皆可表示為 $10^n - 1$ ，

$$f(9) = 1 \quad \langle 1 \sim 9 \text{ 中在個位數中會出現 } 1 \text{ 個 } 1 \rangle$$

$$f(99) = 10 + 10 = 20 \quad \langle 1 \sim 99 \text{ 中在個位數中會出現 } 10 \text{ 個 } 1, \text{ 十位數字會出現 } 10 \text{ 個 } 1 \rangle$$

$$f(999) = 100 + 100 + 100 = 300$$

$$\text{故我們可以得到： } f(10^n - 1) = n \times \frac{10^n}{10} = n \times 10^{n-1} \Rightarrow f(10^n) = n \times 10^{n-1} + 1$$

$$\text{由以上可知： } f(1000) = 3 \times 100 + 1 = 301$$

48. 試問 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{kn^2}{(n^2 + k^2)^2}$ 的值為何？

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$

【參考解答】 Ans:(A)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{kn^2}{(n^2 + k^2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{[1 + (\frac{k}{n})^2]^2} = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

49. 下列何者是正確？

- (A) $5^{56} < 31^{28} < 17^{35} < 10^{51}$ (B) $5^{56} < 17^{35} < 10^{51} < 31^{28}$
(C) $5^{56} < 10^{51} < 17^{35} < 31^{28}$ (D) $17^{35} < 5^{56} < 10^{51} < 31^{28}$

【參考解答】 Ans: (A)。

$$5^{56} = 25^{28} < 31^{28} < 32^{28} = 16^{35} < 17^{35} < 27^{34} = 3^{102} = 9^{51} < 10^{51}$$

50. 矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 的所有特徵根(eigenvalues)的和為多少？

- (A) 0 (B) $2\sqrt{3}$ (C) $4+2\sqrt{3}$ (D) 8

【參考解答】 Ans:(D)。

$$\text{矩陣的特徵根為 } 4, \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

