

# 臺北市立成淵高級中學一百學年度教師甄試 數學科試題

試題說明：本試題分成三部分。

第一部分為第 1 題到第 12 題，為填充題，每題 5 分；

第二部分為第 13 題與第 14 題，為證明題，每題 10 分；

第三部分為第 15 題與第 16 題，為批改作業題，每題 10 分，請依據題後所給的學生解法說明是否有謬誤，若學生解法沒有錯，直接在答案卷的題號後註寫“本題正確”；若有謬誤，請指出謬誤何在，並給予正確解答。

請注意：第一部分請自行在答案卷上依序編號作答；第二部分與第三部分，可不依序作答，但書寫每題時須註明該題題號。

第一部分：填充題(每題 5 分)。請自行在答案卷上編號作答

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right] =$  \_\_\_\_\_。
2. 若直線  $y = 3x + a$  與曲線  $y = x^3 + 2$  有三相異交點，則  $a$  的範圍為 \_\_\_\_\_。
3. 若  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則  $A^{20} =$  \_\_\_\_\_。
4. 已知拋物線  $\Gamma$  與直線  $2y + 3 = 0$  相切，且  $\Gamma$  的對稱軸方程式為  $2x + y = 1$ ，準線方程式為  $x = 2y + 5$ ，則  $\Gamma$  的方程式為 \_\_\_\_\_。
5. 池塘中有一隻青蛙在六塊石頭 A,B,C,D,E,F 上跳來跳去，每次由所在位置的石頭跳到另一塊石頭，若  $a_n$  表示青蛙由石頭 A 出發，跳了  $n$  次後回到石頭 A 的方法數， $a_6 =$  \_\_\_\_\_。
6. 一袋中有十顆球，編號分別為 1,2,3,...,10 的球各一顆。今自袋中隨機一次取出兩球，則所得號數乘積的期望值為 \_\_\_\_\_。
7. 方程式  $\cos \pi x = \frac{x}{4}$  的實根有 \_\_\_\_\_ 個。
8. 已知  $z$  為非零複數，且  $z^5 = \bar{z}$ ，則在複數平面上，以滿足前述要求的  $z$  為頂點所成之多邊形的面積為 \_\_\_\_\_。
9. 已知  $a, b, c$  為正數且  $a + b + c = 1$ ，則  $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right)$  的最小值為 \_\_\_\_\_。
10. 因式分解  $a^{10} + a^5 + 1 =$  \_\_\_\_\_。(答案為兩個有理式的乘積)
11. 若  $\begin{cases} x + \log x = 100 \\ y + 10^y = 100 \end{cases}$ ，則  $x + y =$  \_\_\_\_\_。
12. 設  $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$ ，其中  $n, a_n, b_n$  皆為正整數，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} =$  \_\_\_\_\_。

第二部分：證明題(每題 10 分)

13. 以銳角  $\triangle ABC$  的邊  $\overline{BC}$  為直徑作一圓，分別交另兩邊  $\overline{AB}, \overline{AC}$  於  $D, E$  兩點，求證： $\overline{DE} = \overline{BC} \cdot \cos A$ 。

14. 已知平面  $E$  上有不共線的三點  $A$ 、 $B$ 、 $Q$ ，而平面  $E$  外有一點  $P$ ，若直線  $PQ$  與  $E$  垂直，且  $\angle PAQ$ 、 $\angle QAB$ 、 $\angle PAB$  皆為銳角，求證： $\cos \angle PAQ \cdot \cos \angle QAB = \cos \angle PAB$ 。

第三部分：批改作業題(每題 10 分)。請依據題後所給的學生解法說明是否有謬誤，若學生解法沒有錯，直接在答案卷的題號後註寫“本題正確”；若有謬誤，請指出謬誤何在，並給予正確解答。

15. 求函數  $y = 2x + \sqrt{2x-1}$  的最小值。

(學生解法) 由  $y - 2x = \sqrt{2x-1}$ ，兩邊平方得  $(y - 2x)^2 = 2x - 1$  或  $4x^2 - 2(2y+1)x + (y^2 + 1) = 0$ ， $\because x \in \mathbb{R}$ ，  
 $\therefore$  判別式  $(2y+1)^2 - 4(y^2 + 1) \geq 0$ ，故  $y \geq 0.75$ ，即  $y$  的最小值為 0.75

16. 若對四組資料  $(1,2)$ 、 $(2,m)$ 、 $(4,n)$ 、 $(5,5)$  以最小平方方法所求得之  $y$  對  $x$  的迴歸直線為  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ，求數對  $(m,n)$ 。

(學生解法)  $\because \bar{y} = \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{3}{2}$  又  $\bar{x} = 3, \bar{y} = \frac{m+n+7}{4}$ ， $\therefore m+n=5$ ， $\therefore$  直線方程式為  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  之誤差平方和為

$$\begin{aligned} & \left(2 - \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(m - \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{1}{2} \cdot 5 - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{7}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(5 - m - \frac{7}{2}\right)^2 + 1 \\ &= 2(m-2)^2 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

故當  $m=2, n=3$  時，此平方和最小，即數對  $(m,n) = (2,3)$ 。