# 國立臺中第二高級中學101學年度第一學期第二次教師甄選 數學科試題

請填寫准考證號碼 ________________

**一、填充題：每格5分，共50分。**

1. 若實係數方程式 $x^4-18x^3+kx^2+200x-1984=0$ 的四個根中，有兩個根的乘積為 $-32$，試解此方程式。

2. 從1到9的自然數中，任取四個相異數，令 $x$ 表示四個數字中最小的數字，求 $x$ 的期望值。

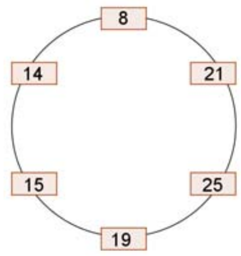
3. 數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_0=3 \\ a_n=\dfrac{3a_{n-1}+1}{a_{n-1}+3}, n\ge 1 \end{cases}$，求 $n\ge 1$ 時，一般項 $a_n$=?

4. 一位小孩在地面上 $A, B, C, D, E$ 等5個點跳動，且每次跳動一定跳至相異於起跳點的位置且每一點機會均等。現在這位小孩在 $A$ 點處，若已知這小孩跳動4次後跳在 $A$ 點處，求他四次中恰有兩次跳到 $A$ 點的機率。

5. 已知 $L:\begin{cases} x+2y-7=0 \\ 2y+z-7=0 \end{cases}$ 為 $L_1:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-6}{-5}=\dfrac{z+2}{7}$ 與 $L_2:\dfrac{x-5}{a}=\dfrac{y-1}{b}=\dfrac{z-5}{-5}$ 之角平分線，試求 $a+b=$__________

6. 若 $n$ 為正整數，且滿足 $2n$ 有40個正因數，$3n$ 有42個正因數，則試問 $6n$ 有________個正因數

7. 如圖，設有6個盒子，各盒內分別有 $8, 14, 15, 19, 25, 21$ 個乒乓球。如果想一次從一個盒內搬一個球到相鄰的盒內，那麼最少要搬_____次才能使每個盒子裡的球數相同。




8. 平面上，$\Delta ABC$ 中 $D$、$E$ 依序為線段 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 上一點，$F$ 為線段 $\overline{DE}$ 上一點，且 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=x, \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=y, \dfrac{\overline{DF}}{\overline{DE}}=z$ 滿足 $2y+z-x=\dfrac{4}{5}$，若 $\Delta BDF$ 面積為 $\Delta ABC$ 面積的 $a$ 倍，則 $a$ 的最大值為__________。

9. 已知函數 $f(x)=x^3-ax^2+(a^2-1)x$ 有極值。設 $I=\{x\in R\mid f'(x)\ge 0\}$，且 $I$ 包含區間 $(-\infty,0)$ 與 $(1,\infty)$，則實數 $a$ 的範圍為__________。

10. 已知橢圓：$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{9}=1$, A 為橢圓在負 $x$ 軸的焦點，雙曲線：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{9}=1$, C 為雙曲線在正 $x$ 軸上的焦點，B,D 分別為橢圓與雙曲線在第二與第四象限的交點，試求 四邊形 ABCD 的周長 。

**二、計算題：每題10分，共50分。**

1. 在複數平面上，$\Delta ABO$ 的頂點 $A$，$B$ 分別對應複數 $z_1$，$z_2$，$O$ 為原點。
若 $|z_1-1-3i|=|z_1-5+5i|$ 且 $z_2=(1+\sqrt{3}i)z_1$，試求 $\Delta ABO$ 的最小面積。

2. 在坐標平面上，兩拋物線 $y=x^2$、$y=-x^2+2x-5$ 與其公切線所圍之封閉區域的面積總和為何?

3. 若圓內接四邊形的邊長分別為 $a,b,c,d$，且 $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$，試證此四邊形的面積為 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

4. 有五筆二維數據 $(0,4), (1,2), (-2,-2), (5,0)$ 及 $(x,y)$，若點 $(x,y)$ 為直線 $L: y=mx-2$ 上一點，且滿足此五筆數據的相關係數為0，試求 $m$ 的範圍。

5. 如圖，平面上三角形 ABC,已知 D,E 分別在 線段 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 上,
且 $\overline{AD}:\overline{BD}=4:5$，$\overline{BE}:\overline{EC}=3:2$，$\overline{AE}$ 和 $\overline{CD}$ 交於點 $O$
,若點 $O$ 為三角形 ABC 之外心，試求 $\overline{AB}^2:\overline{BC}^2:\overline{AC}^2$