國立竹東高級中學102學年度第一次教師甄試數學科試題卷

一、是非題：(對的畫「○」，錯的畫「×」。務必簡單說明您的答案才予計分)
(每題3分，共15分)

X 1. $a>1$時，$y=a^x$與$y=\log_a x$的圖形對稱於直線$y=x$並且不會相交。

○ 2. 長短軸頂點、中心點、兩焦點，這7點之中有可能給三個點就決定橢圓。

○ 3. 設$x\in R$，$|2x-3|+|x-5|\le|x+2|$恆成立，則$(2x-3)(x-5)\le 0$。

X 4. $f(x)$為實係數n次函數，a、$b\in R$；若$f(a)\cdot f(b)<0$，則a與b之間恰有一個實數c使得$f(c)=0$。

X 5. 設a、$b\in R$，已知$-3<a<5$且$-7<b<1$，則存在實數a、b使得$a+b+ab=12$。

二、填充題：(每題6分，共30分)

1. 設G為$\triangle ABC$的重心，直線L過G且分別交$\overline{AB}$，$\overline{BC}$於M,N。若$\overrightarrow{BM}=a\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BN}=b\overrightarrow{BC}$（其中$a>0$，$b>0$），則$ab$的最小值為 $\frac{4}{9}$ 。

2. 若不等式$5x^2-\log_a x<0$在$x\in(0,\ \frac{1}{5})$內恆成立，則a的取值範圍為 $\frac{1}{3125}\le a<1$ 。

3. 在銳角$\triangle ABC$中，$\overline{AD}$垂直$\overline{BC}$於D，$\overline{CE}$垂直$\overline{AB}$於E。以$\overline{DE}$為直徑畫圓，此圓與$\overline{AB}$交於另一點Q。若$\overline{AC}=25$，$\overline{AE}=7$，$\overline{CD}=15$，則$\overline{BQ}=$ 9 。

4. 由曲線$y=x^3$，y軸與直線$y=2$三者所圍成的區域繞y軸旋轉一周所成的旋轉體體積為 ______ 。 $\frac{6\sqrt[3]{4}}{5}\pi$

5. 若函數$f(x)=\sin 2x+2a\cos^2 x-a$（$a$為實數）的圖形對於直線$x=-\frac{\pi}{8}$對稱，則$a=$ -1 。

三、計算題：(共31分)

1. 設曲線$y=f(x)$（$x\ge 0$）過點$(0,\ 0)$，且對於任意$a>0$，此曲線在$x=0$與$x=a$間的弧長為$\frac{2}{3}\left[(1+a)^{\frac{3}{2}}-1\right]$。若對於所有$x\ge 0$，都有$f'(x)\le 0$，則$f(x)=?$(10%) 4

2. $A(7,6,3)$，$B(5,-1,2)$，L：$\frac{x-1}{2}=y=\frac{z-3}{-2}$，$P$為$L$上的動點，求使得$\overline{PA}+\overline{PB}$有最小值的$P$點坐標。(7%) $(\frac{11}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})$

3. 設 $5^{100}=a_n\cdot 2^n+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+a_{n-2}\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+a_1\cdot 2+a_0$，其中 $n\in N$，$a_i\in\{0,1\}$，$i=0$，1，2，……，n，但 $a_n\neq 0$，求 n 之值。(7%) 232

4. 設 $A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$，求 A^n。(7%) $\begin{bmatrix}2^n & n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}$

四、證明題:(共 24 分)

1. 證明：對於所有正整數 n，$\prod_{k=1}^{n}(4-\frac{2}{k})$ 都是正整數。(10%)

2. 請分別利用數學歸納法（9%）與算幾不等式（5%）

   証明：設 n 為大於 1 的正整數，不等式 $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$ 恆成立。