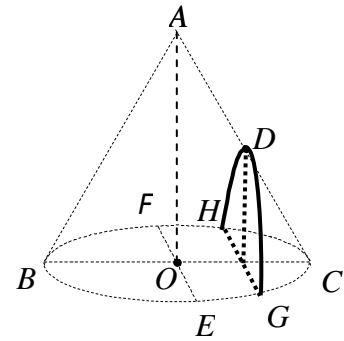


臺北市立中正高級中學 103 學年度第 1 次專任教師甄選數學科試卷

一、填充題：(每題四分)

1. 小新數一數存錢筒內的錢幣：5 元的有 a 個，10 元的有 b 個，50 元的有 c 個，他又發現 a 、 b 、 c 為相異的質數而且 $(a+b)b=c+120$ 。請問小新的存錢筒內共有多少元？
2. 若 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 且 $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3 + 2\sqrt{2}$ ，令函數 $f(x) = (\log_2 \frac{x}{2 \sin \theta})(\log_4 \frac{x}{4 \sin \theta})$ ，求此函數的最小值？
3. 已知有五個正整數，其算術平均數為 14，全距為 20，中位數與眾數皆為 10，求此五數中第二大的數之可能值有多少個？
4. 數學競賽共有三題 A、B、C 難題，今有 25 位數學高手參加競賽，每位學生至少都能解出一題。在沒解出 A 的學生中，解出 B 的人數是解出 C 的人數的 2 倍；只解出 A 的人數比其餘解出 A 的人數多 1；只解出一題的學生中，有一半不能解出 A。試求只解出 B 的人數？
5. 假設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 9$ 、 $\overline{BC} = 7$ 、 $\overline{CA} = 8$ ，且 $\triangle ABC$ 的內切圓與其三邊分別切於 A' 、 B' 、 C' ，試求 $\triangle A'B'C'$ 的面積為何？
6. 假設 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ，周長 20，內切圓半徑為 $\sqrt{3}$ ，試求外接圓面積為何？

7. 右圖為一直圓錐， $\triangle ABC$ 為邊長是 6 的正三角形， $\overline{AD} = \overline{CD}$ ，底圓的圓心為 O ，直徑為 \overline{EF} ，且 $\overline{AO} \perp \overline{BC}$ 。今一平行 \overline{AO} 且垂直 \overline{BC} 的平面過 D 點與直圓錐形成截痕。求此截痕的正焦弦長？



8. 若 $x \in \mathbb{R}$ ，求函數 $y = \frac{\sin 5x}{\sin x}$ 的最小值為何？
9. 由 1 到 50 的連續整數中，任意取出相異兩整數 a 、 b ，試求 $|a-b|$ 的期望值為何？
10. 一袋中有寫著 2、4、6、8、10 的卡片各一張，自袋中隨機取卡片兩次，一次取一張，以隨機變數 \overline{X} 表示兩次的號碼樣本平均數，若取後不放回，求變異數 $\text{Var}(\overline{X}) = ?$
11. 將一正立方體的六面著色，最多可用三色(黃、綠、紅)，則共有多少種不同顏色的立方體？
12. $y = f(x) = 1 - x^2$ 與直線 $x = 0$ ， $x = 1$ 及 $y = 0$ 所圍成區域為 R ，而 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 為 $[0, 1]$ 的 n 等分切割。以 $f(x_k)$ 及 $f(x_{k-1})$ 為上、下底，高為 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 的梯形面積為 A_k ，設 $T_n = \sum_{k=1}^n A_k$ ， $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ ，若欲使 $|T - T_n| < \frac{1}{100}$ ，則 n 的最小正整數值為何？
13. 化簡 $\frac{1 + \sin 6^\circ + \cos 12^\circ}{\cos 6^\circ + \sin 12^\circ} = ?$

二、計算題：(每題八分)

1. 假設 $x^{12} + 7x^{11} + 1 = 0$ 有 x_1, x_2, \dots, x_{12} , 12 個根, 試求 $\prod_{k=1}^{12} (x_k^2 - x_k + 1) = ?$

2. $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數, 則方程式 $\frac{1}{2}[x^2 + x] = 3x + 10$ 的實數解 x 為何?

3. 國民黨、民進黨、親民黨可自由派人參加 7 人會議, 已知一排座位 7 人皆坐滿, 且國民黨與民進黨均不相鄰而坐, 請問共有多少種不同坐法? (例: 國國國國國國國, 國親國國親民民 都算一種坐法)

4. 設 a 為實數且 $0 \leq x \leq 2\pi$, 已知 x 的方程式 $\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sin^2 x = a$ 有四個相異的實根, 請列出此方程式四根和的所有可能值?

5. 若 $(0.\overline{01})^2 = 0.\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0}$, 其中 $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 最短循環節長度為 n ,

求(1) $n = ?$ (2) $a_0 = ?$

6. 有一道題目如下:

用一塊寬 3 公尺長 8 公尺的白鐵板, 先在四個角落各截去相同大小的正方形, 然後摺起四邊焊接起來, 形成一無蓋的長方體蓄水箱, 求此水箱的最大容積?

一位上完高三數學課程學生解題方法如下:

令截去的正方形邊長 x 公尺, 此時水箱底部的長、寬分別為 $(8-2x)$ 公尺 $(3-2x)$ 公尺, 高為 x 公尺, 故水箱體積為 $x(8-2x)(3-2x)$ 立方公尺

依算幾不等式 $\frac{4x + (8-2x) + (3-2x)}{3} \geq \sqrt[3]{4x \cdot (8-2x)(3-2x)} \Rightarrow \frac{1331}{27} \geq 4x \cdot (8-2x)(3-2x)$

$\therefore x(8-2x)(3-2x) \leq \frac{1331}{108}$, 因此最大容積為 $\frac{1331}{108}$ 立方公尺

請說明此學生的錯誤, 且修正此算幾不等式的解法並提出其他解法?

臺北市立中正高級中學 103 學年度第 1 次專任教師甄試數學科答案卷

一、填充題：(每格 4 分，共 52 分)

1. 1270	2. $\frac{-1}{8}$	3. 7	4. 6	5. $\frac{20\sqrt{5}}{7}$
6. $\frac{49\pi}{3}$	7. $\sqrt{3}$	8. $\frac{-5}{4}$	9. 17	10. 3
11. 57	12. 5	13. $\sqrt{3}$		

二、計算證明題：(每題 8 分)

1.