

科目：數學科

選擇題：共 40 題，總分 100 分。每題 2.5 分。

- 坐標平面上，若拋物線 $y = ax^2 + bx + c$ 的頂點在第一象限，且圖形的開口向下，則直線 $y = ax + b$ 不通過 哪一象限？
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 坐標平面上，滿足 $2^x \times 4^{-y} = 8$ 的所有點 (x, y) 所形成的圖形為何？
(A) 斜率為 $\frac{1}{2}$ 的直線 (B) 斜率為 2 的直線 (C) 開口向上的拋物線 (D) 開口向下的拋物線
- 若實係數多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 3x + 2$ 的餘式為 $x - 1$ ，則下列哪一個選項不正確？
(A) $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 0
(B) $f(x)$ 除以 $x - 2$ 的餘式為 1
(C) $f(x)$ 除以 $2x^2 - 6x + 4$ 的餘式為 $x - 1$
(D) $f(x)$ 除以 $-x^2 + 3x - 2$ 的餘式為 $-x + 1$
- 設 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ，若將函數 $f(x)$ 迭代 n 次記為 $f^{(n)}(x)$ ，例如 $f^{(3)}(x) = f(f(f(x)))$ ，則 $f^{(107)}(x) = ?$
(A) $\frac{x}{106x+1}$ (B) $\frac{x}{x+106}$ (C) $\frac{x}{107x+1}$ (D) $\frac{x}{x+107}$
- 假設點擊電腦程式中的指令一次，螢幕上的實數 k 就會變成 2^k 。若螢幕上的實數 a 經過連續點擊兩次後，螢幕上的實數會變成 3^{41} ，則 a 最接近下列哪一個整數？
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8
- 摸彩箱中有編號 1, 2, 3, 4, 5 的球共 15 個，其中 k 號球有 k 個 ($k = 1, 2, 3, 4, 5$)，摸取到 k 號球可獲得 $100 \times k$ 元的獎金。若每一球被取到的機率均等，則摸取一球可獲得獎金的期望值為何？
(A) $\frac{1100}{3}$ (B) $\frac{1130}{3}$ (C) $\frac{1160}{3}$ (D) $\frac{1190}{3}$
- 若 $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1}{2}$ ，則 $\frac{\sin 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ 的值為何？
(A) $-\frac{5}{6}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$
- 網路行銷公司調查客戶對某產品的滿意度評價，請客戶從「滿意」、「不滿意」、「普通」中擇一投票。滿意度的積分規則計算如下：開始時積分為 0，每獲一張「滿意」票得 2 分，每獲一張「不滿意」票扣 1 分，每獲一張「普通」票得 0 分。已知經過投票後，累計有 200 張有效票，積分為 104 分，其中「滿意」票與「不滿意」票的比例為 11:9，試問有效票中，「普通」票有多少張？
(A) 36 (B) 38 (C) 40 (D) 42
- 在 4 與 64 之間插入三整數 a, b, c ，使得 4, a, b 與 $b, c, 64$ 都是等比數列，而 a, b, c 是等差數列，則所有可能的 a, b, c 之總和為多少？
(A) 114 (B) 102 (C) 75 (D) 27
- 關於 $a = 3^{10} \times 5^7$, $b = 5^7 \times 8^5$, $c = 3^{10} \times 8^5$ 三數的大小關係，下列哪一個選項是正確的？
(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > a > c$ (D) $b > c > a$
- 已知向量 \vec{u} 與 \vec{v} 滿足 $|\vec{u}| = \sqrt{5}$ 、 $|\vec{v}| = 2\sqrt{5}$ 、 $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$ ，則由 \vec{u} 與 \vec{v} 展成的三角形面積為何？
(A) 3 (B) 5 (C) 8 (D) 10

12. 袋中有 5 個紅球、3 個白球、2 個黑球，共 10 個球。今從袋中取球，每次取出一球，取出不放回。若每一球被取到的機率均等，則直到第五次才取出全部白球的機率為何？
 (A) $\frac{1}{18}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) $\frac{1}{22}$ (D) $\frac{1}{24}$
13. 設 A 、 B 為兩個集合，函數 $f: A \rightarrow B$ 定義為 $x \rightarrow \frac{1}{|x|-1}$ ，若 $B = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ ，則集合 A 中最多有幾個元素？
 (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8
14. 若 a 、 b 為實數，且 $a^2 > b > 0$ ，則存在一實數 x 滿足「 $|x-a| < b$ 且 $x^2 - 2ax + b > 0$ 」的充要條件為何？
 (A) $b(b+1) < 4a^2$ (B) $b(b+1) > 4a^2$ (C) $b(b+1) < a^2$ (D) $b(b+1) > a^2$
15. 坐標平面上，若直線 L 通過點 $(2, 2^a)$ 與 $(4, 4^a)$ ，且與直線 $2x + 6y = 5$ 垂直，則 a 的值為何？
 (A) $\log_2 3$ (B) $\log_3 2$ (C) $\log_2 5$ (D) $\log_5 2$
16. 若 $|ax+1| \leq b$ 與 $(x+1)(3-x) \geq 0$ 有相同的解區間，則 $(a, b) = ?$
 (A) $(-1, 2)$ (B) $(-1, 3)$ (C) $(0, 3)$ (D) $(1, 3)$
17. 設 a 為一實數， $M = \{x | x^2 - 3x - a^2 + 2 = 0, x \in R\}$ ，則 M 的非空子集合有幾個？
 (A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個
18. 若 $w = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ ，則 $w^2 + w^4 + w^6 + \cdots + w^{108} = ?$
 (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1
19. 設 R 為坐標平面上由 $3x+y \geq 9$ 、 $x-2y \leq -4$ 、 $x+5y \leq 31$ 所圍成的區域。若點 $P(x, y) \in R$ ，使得 $\frac{y-2}{x+5}$ 有最大值 m ，則 $m = ?$
 (A) $\frac{2}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{4}{3}$ (D) 2
20. 某高中調查全校學生的嗜好發現，每 10 位學生中有 6 位喜歡打籃球，也有 7 位喜歡玩手機遊戲。已知學生喜歡打籃球與喜歡玩手機遊戲為獨立事件，則隨機遇到一位該校學生不喜歡打籃球、也不喜歡玩手機遊戲的機率為何？
 (A) $\frac{3}{25}$ (B) $\frac{2}{25}$ (C) $\frac{3}{50}$ (D) $\frac{7}{50}$
21. 若整係數多項式函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 滿足 $f(0) = 0$ 、 $f(1) = 1$ ，且 $422 \leq f(7) \leq 432$ ，則 $f(3) = ?$
 (A) 36 (B) 37 (C) 38 (D) 39
22. 若 2×2 階方陣 A ，滿足 $A \begin{bmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 4 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ ，則下列哪一個選項是正確的？
 (A) $x = 21$ (B) $x = 22$ (C) $y = 34$ (D) $y = 35$
23. 設海巡署某觀測站位於 A 處獲悉，在其正東方向相距 20 海浬的 B 處有一艘漁船（甲船）故障等待營救。海巡署立即把消息告知在海巡署的南偏西 30° ，相距 10 海浬 C 處的乙船。若乙船朝北偏東 α 度的方向沿直線前往 B 處救援甲船，則 $\cos \alpha^\circ$ 之值為何？
 (A) $\sqrt{\frac{2}{7}}$ (B) $\sqrt{\frac{3}{7}}$ (C) $\sqrt{\frac{5}{9}}$ (D) $\sqrt{\frac{4}{7}}$
24. 設 $\triangle ABC$ 為邊長 a ($a > 0$) 的正三角形，頂點 A 在正 x 軸上，頂點 B 在正 y 軸上，頂點 C 與原點 O 在 \overline{AB} 的異側；若讓 A 、 B 兩點在坐標軸上移動，則頂點 C 的軌跡為何？
 (A) 拋物線的一部分 (B) 雙曲線的一部分 (C) 橢圓的一部分 (D) 圓的一部分

25. 設數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項部分和為 S_n ，若對所有的正整數 n 都滿足 $a_n + S_n = 4036$ ，則 $a_{11} = ?$

- (A) $\frac{1009}{256}$ (B) $\frac{1009}{512}$ (C) $\frac{1009}{1024}$ (D) $\frac{1009}{2018}$

26. 函數 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 12x + 37}$ 的最大值為何？

- (A) $2\sqrt{6}$ (B) 5 (C) $\sqrt{26}$ (D) $3\sqrt{3}$

27. 有 7 位歌手參加「我是歌手」測試，由甲和乙兩位評審評定「通過」或「不通過」，規定每一位歌手只要被甲或乙有一位評為通過就視為通過。已知恰有 4 位歌手通過測試，其中編號 1 號的歌手被甲評為通過，而被乙評為不通過，試問兩位評審對這 7 位歌手之評定方式有幾種可能的組合？

- (A) 140 (B) 360 (C) 480 (D) 540

28. 已知無窮數列 $\{a_n\}$ 定義如下： $a_1 = 0.21, a_2 = 0.0201, a_3 = 0.002001, \dots$ ，即 $a_n = 0.\overbrace{00 \dots 2}^{n \text{ 個}} \overbrace{00 \dots 1}^{n \text{ 個}}$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$

- (A) $\frac{8}{33}$ (B) $\frac{10}{33}$ (C) $\frac{23}{99}$ (D) $\frac{25}{99}$

29. 有 10 位選手參加單循環的飛鏢比賽，每兩位選手比賽一場，勝者得 2 分、平手各得 1 分、敗者得 0 分，試問下列哪一選項不正確？

- (A) 這 10 位選手的得分總和低於 100 分
(B) 得分為偶數的選手人數必為偶數
(C) 有可能每一位選手的得分都低於 9 分
(D) 不可能有兩位選手都得到 0 分

30. 在 503 後面填三位數 abc ，使得所得的六位數 $503abc$ 可以被 7, 9, 11 整除，則滿足上述條件的三位數 abc 共有幾個？

- (A) 0 個 (B) 1 個 (C) 2 個 (D) 3 個

31. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{BC} = 5$ 且 $\angle ABC = 120^\circ$ 。若過 $\triangle ABC$ 的內心且與 \overline{BC} 平行的直線分別與 \overline{AB} 、 \overline{AC} 交於點 P 與點 Q ，則 $\triangle APQ$ 的周長為何？

- (A) 10 (B) $6 + \sqrt{13}$ (C) 12 (D) $3 + 2\sqrt{13}$

32. 從 1, 2, 3, 4, 7, 9 六個數中任取兩個相異的數，作為一個對數的底數和真數，則共有多少種不同的對數？

- (A) 25 (B) 21 (C) 19 (D) 17

33. 某次段考，數學與英文的成績滿分都是 100 分，考完後老師打算調整班上這兩科的成績，調整方式如下：數學成績乘以 1.2 後再加 5 分，英文成績乘以 0.8 後再加 25 分。請問下列哪一個選項不正確？

- (A) 調整後每一位學生兩科的成績都高於原始成績
(B) 全班這兩科成績調整後的平均分數都高於原始的平均分數
(C) 全班這兩科成績調整後的標準差都高於原始的標準差
(D) 全班這兩科成績的相關係數不變

34. 滿足 $\log_3(7x - x^2) < 1 + \log_3(7 - x)$ 的 x 之範圍為何？

- (A) $-2 < x < 0$ (B) $-1 < x < 1$ (C) $2 < x < 4$ (D) $0 < x < 3$

35. 設 $y = 4\sqrt{5x+6} + \frac{1}{(5x+6)^2}$ ，則 y 的最小值為何？

- (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

36. 在圓內接四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\angle A = 105^\circ$ 、 $\angle ABD = 45^\circ$ 且 $\angle CBD = 60^\circ$ ，則 $\overline{AB} : \overline{BC} = ?$

- (A) 1:1 (B) $1:\sqrt{2}$ (C) $1:\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}:\sqrt{3}$

37. 設 $\{a_n\}$ 為等差數列，它的公差 $d > 0$ 且 $a_1 = 3$ 。若 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n} = ?$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 無限大

38. 若方程式 $x^2 - 2ax + a^2 - 4a = 0$ (其中 a 為實數)，至少有一個絕對值為 3 的複數根，則 a 所有可能的值之和為多少？
(A) 10 (B) $10 - \sqrt{13}$ (C) $11 + \sqrt{13}$ (D) $12 - \sqrt{13}$
39. 年底即將舉行直轄市市長的選舉，某候選人競選團隊委託甲、乙兩家民調機構調查其支持度，結果如下：在 95% 的信心水準下，甲調查機構所得此候選人支持度的信賴區間為 $[0.18, 0.22]$ ，乙調查機構所得此候選人支持度的信賴區間為 $[0.20, 0.24]$ 。若甲、乙兩家民調機構調查此候選人的支持度分別為 p_1 與 p_2 ，則下列選項何者正確？
(A) $p_1 = p_2$
(B) 甲民調機構的抽樣樣本數必多於乙調查機構的抽樣樣本數
(C) 若選舉結果此候選人的支持度恰為 p_1 ，則甲調查機構的信心水準大於乙調查機構的信心水準
(D) 若乙民調機構的有效樣本中支持此候選人的有 352 人，則其樣本數為 1600 人
40. 設凸四邊形 $ABCD$ 的兩對角線交於點 O 。若 $\triangle OAB$ 、 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OCD$ 的面積分別為 12、11、14，且 P 為 \overline{AD} 的中點，則 $\triangle PBC$ 的面積為何？
(A) 22 (B) 24 (C) 26 (D) 28