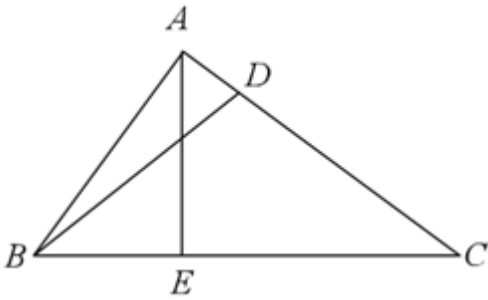


臺北市立南港高中 102 學年度第 2 次代理教師甄選數學試題卷

須將完整過程寫於答案卷，答案卷上請標明題號作答，14. 15. 題為多選題也須將理由寫出

- 考慮滿足下列條件的所有三角形  $ABC$ ： $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $D$  在  $\overline{AC}$  上， $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{AD}$  與  $\overline{CD}$  的長度均為整數， $\overline{BD}^2 = 87$ 。在所有這樣的三角形中， $\overline{AC}$  長度的最小值為何？
- 設  $a, b, c, d \in R$  且  $d \neq 0$ ，若方程式  $x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 10 = 0$  有兩根為  $c + di$  及  $c + 2di$ ，試求  $a, b, c, d$  的值。
- 四面體  $OABC$  中， $\overline{OC} \perp \overline{OA}$ ， $\overline{OC} \perp \overline{OB}$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ，且  $\overline{OB} = 2\overline{OA} = 2\overline{OC}$ ，已知  $M$  為  $\overline{AC}$  之中點， $H$  在  $\overline{AB}$  上，若  $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ ，求  $\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$  為何？
- 如圖所示，三角形  $ABC$  中， $\angle BAC$  為直角， $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{BD} = \overline{DC} = \overline{EC} = 1$ ，求  $\overline{AC}$  之長度。

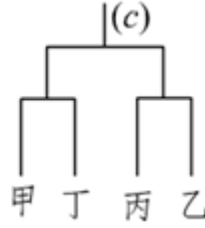
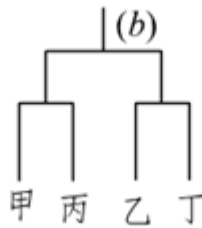
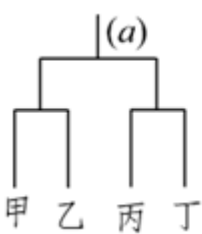


- 若數列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2013}$  中每一項皆為  $0, 1, -1, 2$  或  $-2$ ，則  $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{2013}$  的值有幾種可能？
- 設平面上三向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  滿足  $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ，且  $|\vec{a}| = 20, |\vec{b}| = 15, |\vec{a} - \vec{b}| = 7$ ，求  $\vec{a}$  在  $\vec{c}$  上的正射影長。
- 圓內接四邊形  $ABCD$ ， $\overline{AC}$  為圓之直徑， $\angle BAC = \alpha, \angle DAC = \beta$ ，若  $\overline{BD} = 10, \angle BAD = 45^\circ$ ，且  $\Delta ABC$  的面積為  $\Delta ACD$  面積的兩倍，求  $\Delta ABC$  的面積。
- 梯形  $ABCD$ ，其中  $\overline{AB}$  平行  $\overline{CD}$ ，已知梯形面積為  $45$ ，若三邊的方程式分別為： $AB$  邊： $x + 2y - 1 = 0$ ， $BC$  邊： $2x - y - 7 = 0$ ， $AD$  邊： $2x + y - 2 = 0$ ，求第四邊  $CD$  所在的直線方程式。
- 若  $4 < x < 100$  且  $\log 3x$  的尾數是  $\log x$  尾數的  $2$  倍，求  $x$  的值。
- 若動點  $P(x, y)$  到直線  $x = -1$  的距離是到點  $F(1, 0)$  的距離的  $k$  倍 ( $k > 0$ )，就  $k$  討論動點  $P$  之軌跡圖形。

交卷時請一併繳回試題

臺北市立南港高中 102 學年度第 2 次代理教師甄選數學試題卷

11. 袋中有 8 顆白球，9 顆黑球，10 顆紅球共 27 顆球。今從袋中取球，一次取一顆，取後不放回，試問白球最先取完的機率為何？
12. 試求在平面  $2x - y + 2z = 0$  上，與  $L: \frac{x-2}{7} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-2}{-11}$  平行且與  $L$  之距離為  $\sqrt{35}$  的直線方程式。
13. 座標平面上四點， $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$ ,  $C(t,0)$ ，其中  $0 < t < 1$ ，設  $D$  在  $\overline{AB}$  上，且  $\angle ACD = \angle BCO$ ，當  $t = \alpha$  時， $\triangle BCD$  面積有最大值  $S$ ，求數對  $(\alpha, S)$ 。
14. 設直線  $x + y - 8 = 0$  與  $y = 2^x$ ， $y = \log_2 x$  分別交於  $P(a,b)$ ,  $Q(c,d)$  兩點，且  $O$  為原點，下列哪些正確？  
 (A)  $a > 2$                       (B)  $c > 6$                       (C)  $2^d = b$                       (D)  $\triangle OPQ$  的面積大於 20
15. 甲、乙、丙、丁四支籃球隊，由下列三種賽程擇一進行單淘汰賽（輸一場即出局）。



已知甲勝其他任何一隊的機率皆為  $\frac{2}{3}$ ，乙勝其他任何一隊的機率皆為  $\frac{1}{3}$ ，丙丁實力相當，比賽沒有和局，下列哪些正確？

- (A) 不論採何種賽程，甲獲得冠軍的機率皆為  $\frac{4}{9}$
- (B) 對丙而言，三種賽程中採用 (a)，其獲得冠軍的機率最高
- (C) 在賽程 (a) 中，丙得冠軍的機率為  $\frac{6}{27}$
- (D) 若用抽籤的方法決定賽程，則甲、丁能相遇進行比賽的機率超過  $\frac{3}{5}$
16. 圓內接四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = 3$ ,  $\overline{BC} = 5$ ,  $\overline{CD} = 8$ ,  $\overline{DA} \cdot \overline{DC} = 20$ ，點  $P$  為四邊形  $ABCD$  內一點，點  $P$  至  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DA}$  的距離分別為  $a, b, c, d$ ，求  $9a^2 + b^2 + 16c^2 + d^2$  的最小值。
17. 有一個四面體  $ABCD$ ，其中  $\overline{AB} = \overline{CD} = 5$ ， $\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{41}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{34}$ ，求此四面體的體積。

18. 試推導出費波那契數列  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1 \end{cases}$  的一般式  $a_n$ 。(以  $n$  表示)

交卷時請一併繳回試題