

新竹縣立東興國民中學 106 年度教師甄選試題

科目：數學專業科目

說明：選擇題，共五十題，每題二分，答錯不倒扣，總分一百分。

1. 求此無窮級數  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n-1}{(n-1)^2 n^2}$  的和為？

- (A)  $\frac{1}{2}$       (B)  $\frac{1}{3}$       (C)  $\frac{1}{4}$       (D) 不存在

2. 將三個半徑為 1 的球彼此外切且放置在一水平面上，一個半徑為 3 的大球放在它們的上面，試問大球的最高點至平面的距離是多少？

- (A)  $4 + \frac{2\sqrt{33}}{3}$     (B)  $4 + \frac{\sqrt{61}}{3}$     (C)  $4 + \frac{\sqrt{141}}{3}$     (D) 8

3. 已知正  $\triangle ABC$  的外接圓上任取一點  $P$ ，若  $\overline{PA} > \overline{PB} > \overline{PC}$ ，則下列敘述何者正確？

- (A)  $\overline{PA} > \overline{PB} + \overline{PC}$     (B)  $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$     (C)  $\overline{PA} < \overline{PB} + \overline{PC}$     (D) 以上皆非

4. 將 6 這個數寫成 4 個正整數之和的方法如下：

$$6 = 1+1+1+3 = 1+1+3+1 = 1+3+1+1 = 3+1+1+1 \\ = 1+1+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+2+1 = 1+2+1+2 = 1+2+2+1 = 2+1+1+2$$

若有順序之分，則有 10 種方法數。

依此方法，將 10 這個數寫成 4 個正整數之和，則會有 \_\_\_\_\_ 種方法數。

- (A) 65      (B) 72      (C) 84      (D) 106

5. 已知有三個三角形它們的邊長分別為  $(1, 1, \sqrt{2})$ ,  $(3, 4, 5)$  與  $(5, 12, 13)$ ，求這三個三角形的面積和為多少平方單位？

- (A) 36.5      (B)  $36 + \frac{\sqrt{2}}{2}$       (C)  $40 + \frac{\sqrt{2}}{2}$       (D)  $88 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

6. 已知  $p = 2^{20}$ 、 $q = 5^{10}$ ，則下列何者正確？（ $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$ ）

- (A)  $q$  的最高位數字為 8    (B)  $p+q$  的個位數字為 9    (C)  $p+q$  是 7 位數    (D)  $pq$  是 14 位數

7. 設  $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$  且  $g\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ ，求  $f(g(2)) = ?$

- (A) 4      (B)  $\frac{1}{4}$       (C) 16      (D)  $\frac{1}{16}$

8. 求  $\frac{2}{3 \times 5} + \frac{3}{5 \times 8} + \frac{4}{8 \times 12} + \frac{5}{12 \times 17} + \frac{6}{17 \times 23} + \frac{7}{23 \times 30} = ?$

- (A)  $\frac{9}{10}$       (B)  $\frac{13}{30}$       (C)  $\frac{11}{30}$       (D)  $\frac{9}{30}$

9. 求不等式  $y < -2x + 50$  的所有正整數解  $(x, y)$  有幾組？

- (A) 1081      (B) 1128      (C) 1176      (D) 以上皆非

10. 設  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  為空間中的三個非零且不平行向量，請選出正確的選項。

- (A)  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$   
 (B) 若  $\vec{a} \perp \vec{b}$  且  $\vec{b} \perp \vec{c}$ ，則  $\vec{a} \perp \vec{c}$   
 (C) 若  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$  且  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ，則  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$   
 (D) 若  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ ，則  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  與  $\vec{c}$  落在同一平面上

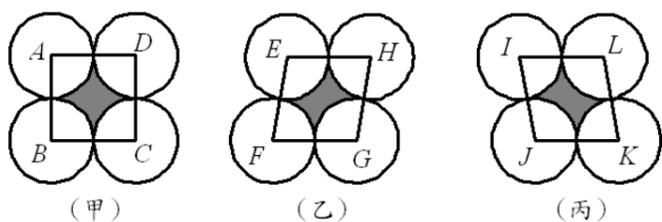
背面尚有試題

11. 已知  $x$  為實數，則  $\sqrt{x^2 - 6x + 34} + \sqrt{x^2 + 4x + 13}$  的最小值為？  
 (A)  $\sqrt{13} + \sqrt{34}$  (B)  $3 + 5\sqrt{2}$  (C)  $\sqrt{89}$  (D)  $\sqrt{91}$
12. 若  $300 \leq A < 400$ ， $100 \leq B < 200$ ， $0 \leq C < 100$ ，已知  $A$ 、 $B$ 、 $C$  分別除以  $m$  後，餘數分別為 17、13 和 6，且  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的和可以被  $m$  整除，請問  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的和最大是多少？  
 (A) 692 (B) 684 (C) 648 (D) 624
13. 求  $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} + \cos \frac{10\pi}{5} = ?$   
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2
14. 已知二次函數  $f(x)$  的圖形移動後會和  $g(x) = -2(x - 3)^2 - 5$  的圖形重合，而且  $f(5 + k) = f(5 - k)$ ，請問下列何者正確？  
 (A)  $f(2) > f(5) > f(7)$  (B)  $f(7) > f(5) > f(2)$  (C)  $f(5) > f(7) > f(2)$  (D)  $f(5) > f(2) > f(7)$
15. 已知  $\triangle ABC$  中  $E$  在  $\overline{AB}$  上且  $D$  在  $\overline{BC}$  上，若  $\overline{DE}$  垂直  $\overline{BC}$  且  $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{AC} = 9$ ， $\overline{BE} = 2$ ， $\overline{BD} = \frac{6}{5}$ ，則  $\overline{BC} = ?$   
 (A) 8 (B) 10 (C)  $6 + \sqrt{17}$  (D)  $8 + \sqrt{17}$
16. 設  $P$  為正三角形內部中的一點，且  $P$  點到三邊距離分別為 4、5、6，請問，這個正三角形的面積大小為何？  
 (A)  $150\sqrt{3}$  (B) 225 (C) 150 (D)  $75\sqrt{3}$
17. 求  $|\sin 76^\circ - 1| - |8 - \sqrt{65}| + |7 - 2\pi| = ?$   
 (A)  $-\sin 76^\circ - \sqrt{65} - 2\pi$  (B)  $2 - \sin 76^\circ - \sqrt{65} + 2\pi$   
 (C)  $-2 + \sin 76^\circ - \sqrt{65} - 2\pi$  (D)  $16 - \sin 76^\circ - \sqrt{65} - 2\pi$
18. 設  $\alpha$ 、 $\beta$  為  $x^2 + 2x - 5 = 0$  之兩根，則  $2\alpha^3 - 9\beta^2 + 100 = ?$   
 (A)  $-1 + \sqrt{6}$  (B)  $-1 - \sqrt{6}$  (C)  $-\sqrt{6}$  (D) -1
19. 假設  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  且  $f^{(2)}(x) = f[f(x)]$ ，求  $f^{(200)}(200) = ?$   
 (A)  $\frac{200}{40001}$  (B)  $\frac{1}{200}$  (C)  $\frac{400}{80001}$  (D)  $\frac{1}{400}$
20. 若  $a < b < c$ ，且  $x < y < z$ ，設  $A = ax + by + cz$ ， $B = ax + cy + bz$ ， $C = bx + cy + az$ ，請問  $A$ 、 $B$ 、 $C$  中最小的是？  
 (A) A (B) B (C) C (D) 不一定
21. 已知座標平面上圓  $O$  之圓心座標為  $(2, 2)$  且與  $x$  軸切於  $(2, 0)$ ，今過  $(6, 0)$  作別於  $x$  軸的切線，則該切線切於圓  $O$  的切點座標為？  
 (A)  $(\frac{16}{5}, \frac{18}{5})$  (B)  $(\frac{18}{5}, \frac{16}{5})$  (C)  $(\frac{16}{5}, \frac{16}{5})$  (D)  $(\frac{18}{5}, \frac{18}{5})$
22. 假設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  都是質數，且  $a + b + c + abc = 99$ ，則  $a + b + c = ?$   
 (A) 23 (B) 25 (C) 26 (D) 28
23. 求空間中此方程式  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$  圖形與  $yz$  平面相交的圖形為？  
 (A) 圓 (B) 橢圓 (C) 雙曲線 (D) 以上皆非

24. 如圖，四邊形  $ABCD$  為邊長 2 公分的正方形， $EFGH$ 、 $IJKL$  為邊長 2 公分的菱形，其中  $\angle F=70^\circ$ 、 $\angle J=100^\circ$ 。

分別以各頂點為圓心，1 公分為半徑畫圓，則甲、乙、丙三個圖中灰色部分面積大小關係為何？

- (A) 甲 = 乙 = 丙      (B) 甲 > 乙 = 丙      (C) 甲 > 乙 > 丙      (D) 甲 > 丙 > 乙



25. 已知  $\frac{b}{xy} + \frac{x}{ab} = \frac{91}{15}$ ，求  $\frac{3ab^2 - 5abxy + 3x^2y}{2ab^2 + 4abxy + 2x^2y} = ?$

- (A)  $\frac{9}{11}$       (B)  $\frac{11}{9}$       (C)  $\frac{91}{15}$       (D)  $\frac{15}{91}$

26. 坐標平面上  $A$  點坐標  $(4, 5)$ ， $O$  為原點，若要在兩條軸上找一點  $P$ ，使得  $\triangle AOP$  為等腰三角形，

請問：符合條件的  $P$  點共有幾個？

- (A) 4      (B) 6      (C) 8      (D) 10 個

27. 已知直線  $y = k$  與函數  $y = x^{-5}$ ， $y = x^{-10}$ ， $y = x^{-15}$  之交點分別為  $A, B$ 、 $C, D$  與  $E, F$  且  $\overline{AB} = a$ ， $\overline{CD} = c$ ， $\overline{EF} = e$ 。如果  $0 < k < 1$  則下列何者正確？

- (A)  $a < c < e$       (B)  $e < c < a$       (C)  $a = c = e$       (D) 以上皆有可能

28. 一副撲克牌有 52 張，有四種花色黑桃、紅心、梅花、方塊各 13 張 ( $A, 2, 3, 4, \dots, J, Q, K$ )，其中我們約定  $A=1$ 、 $J=11$ 、 $Q=12$ 、 $K=13$ ，現將整副撲克牌由上而下依下列規則排列：數字順序為  $A, 4, 7, 10, K, 3, 6, 9, Q, 2, 5, 8, J, A, \dots$ ，花色排列順序則為黑桃、紅心、梅花、方塊，已知整副撲克牌的第一張為黑桃  $A$ ，則關於此副撲克牌的敘述何者錯誤？

- (A) 該副牌的最後一張會是方塊  $J$   
 (B) 所有的  $K$  應該會出現在第 5、18、31、44 張  
 (C) 依序找出所有的  $Q$ ，花色出現的順序會是黑桃、方塊、梅花、紅心  
 (D) 依序將所有的黑桃牌找出來，最後一張會是黑桃 2

29. 求無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n} [3^n + 8(\frac{3^n}{2^n})]$  的和為？

- (A)  $107\frac{3}{5}$       (B)  $117\frac{3}{5}$       (C)  $127\frac{3}{5}$       (D)  $\infty$

30. 如右圖， $B, C, E$  三點共線且  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 、 $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ ，若  $\triangle ABC$  的面積為 16， $\triangle CDE$  的面積為 36，

則  $\triangle ACD$  的面積為何？

- (A) 18      (B) 20      (C) 22      (D) 24



31. 將一正方形切成四個矩形，已知其中三個的面積分別為 4、9、16 平方公分，則第四個矩形的面積有幾種可能？

- (A) 1      (B) 2      (C) 無窮多      (D) 以上皆非

背面尚有試題

32. 如右圖，四邊形  $ABCD$  中， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle ACB = \angle ADB = 30^\circ$ ， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$ ，

則  $\overline{CD} = ?$

- (A) 7                      (B) 8                      (C)  $6\sqrt{2}$                       (D)  $6\sqrt{3}$



33. 若平面上有兩組平行線，第一組有相異 20 條皆平行  $x$  軸，第二組有相異 10 條皆平行  $y$  軸，求這 30 條線共形成幾個正方形？

- (A) 2000                      (B) 2480                      (C) 4275                      (D) 8550

34. 圓周上八個點  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  將圓  $O$  的圓周八等分，若圓  $O$  的半徑為 4，

則  $\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{DG}^2 + \overline{GA}^2 = ?$

- (A) 32                      (B) 64                      (C) 96                      (D) 128

35. 已知  $10^x = y$ ，則下列何者正確？

- (A)  $x = \ln y$                       (B)  $y = \ln x$                       (C)  $x = \log y$                       (D)  $y = \log x$

36. 我們常用奇位數的和與偶位數的和之間的差是否為 11 的倍數（這裏指的奇位數是個位數、百位數、萬位數、...，偶位數指的是十位數、千位數、...），來作為判斷該數是否為 11 的倍數的方法。

然而，如果某數的（奇位數的和）-（偶位數的和）=-13，請問，某數  $\div 11$  所得餘數可否判斷？

- (A) 可判斷，餘數=13                      (B) 可判斷，餘數=2                      (C) 可判斷，餘數=9                      (D) 條件不足，無法判斷

37. 假設袋中有 100 個紅球與 80 個白球，今任意取出 50 個球，則下列敘述何者正確？

- (A) 袋中紅球的個數比取出白球的個數可能多出超過 50 個  
(B) 袋中紅球的個數比取出白球的個數可能多出 1 個到 49 個之間  
(C) 袋中紅球的個數比取出白球的個數多 50 個  
(D) 以上皆有可能

38. 請問，下列對重心的敘述，何者正確？

- (A) 通過三角形重心的任意直線，會將三角形分割成兩塊等面積圖形  
(B) 通過平行四邊形重心的任意直線，會將三角形分割成兩塊全等的圖形  
(C) 鳶形對角線的交點，即為重心  
(D) 梯形的重心，會落在梯形兩腰中點的連線段上

39. 對於座標平面上，任意以  $(2,4)$  與  $(5,8)$  為圓心的兩圓，假設它們的半徑分別為  $r_1$  與  $r_2$ 。若兩圓相切則下列何者正確？

- (A)  $r_1 + r_2 = 5$                       (B)  $r_1 - r_2 = 5$                       (C)  $r_2 + r_1 = 5$                       (D) 以上皆有可能

40.  $\overline{AB}$  為直徑， $\overline{DO} \perp \overline{AB}$  交  $\overline{AC}$  於  $D$  點，以下敘述何者錯誤？

- (A)  $\overline{AD} = \overline{BD}$                       (B)  $\angle C = 90^\circ$                       (C) 四邊形  $ODCB$  為鳶形                      (D)  $\angle A = \angle DBO$



41. 已知  $a$ ， $b$ ， $c$ ， $d$  皆為正整數且  $2a < 3b$ ， $b < 4c + 8$ ， $c < 8d$ ，求  $a$  的最大值除以 48 之餘數為？

- (A) 11                      (B) 13                      (C) 15                      (D) 17

42. 某一檢查方法對檢驗某一疾病有 90% 的準確率，也就是說，如果患有該疾病的人做檢查，那麼有 90% 的機會會呈現陽性反應；如果沒有該疾病的人做檢查，也有 90% 的機會會呈現陰性反應。假設已知全國人口中有 5% 的人患有該疾病，如果有一人以此檢查方法的檢查結果為陽性，那麼他罹患該病的機率為何？

- (A) 7/50                      (B) 43/50                      (C) 19/28                      (D) 9/28

43. 求所有三位數  $abc$  (100 到 999) 中，所有  $a \neq b \neq c$  的數有幾個？

- (A) 648                      (B) 729                      (C) 810                      (D) 以上皆非

44. 下列敘述何者錯誤？

- (A) 任意菱形恰有一內切圓      (B) 任意矩形恰有一外接圓      (C) 被一個三角形所包含之圓中，內切圓之面積最大  
(D) 包含一個三角形之所有圓中，外接圓之面積最小

45. 假設一元三次方程式  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  有三個根成等差數列，則下列敘述何者錯誤？

- (A) 有一根為  $-\frac{a}{3}$       (B) 某兩根和為  $-\frac{2a}{3}$       (C)  $2a^3 + 27c = 9ab$       (D)  $a^2 < 3b$

46. 設正整數  $m, n$  滿足  $\frac{3}{4} < \frac{m}{n} < \frac{5}{6}$ ，當  $n$  最小時， $m$  是多少？

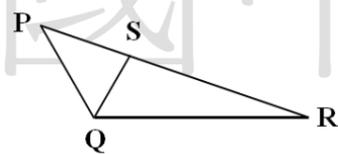
- (A) 2                      (B) 4                      (C) 6                      (D) 8

47. 已知  $a, b, c, d$  皆為實數且滿足  $a + b + c + d = 5$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{25}{3}$ ，

則當  $a$  達到可能的最大值時  $b$  為？

- (A)  $\frac{5}{3}$                       (B)  $\frac{5}{4}$                       (C)  $\frac{5}{6}$                       (D) 以上皆有可能

48. 如圖， $\overline{QS}$  為三角形  $PQR$  的角平分線，且  $\angle PQS = \angle RQS = 60^\circ$ ，已知  $\overline{PQ} = 3$ ,  $\overline{QR} = 6$ ，求  $\overline{QS} = ?$



- (A)  $\frac{3}{2}\sqrt{3}$                       (B)  $\sqrt{3}$                       (C) 2                      (D)  $\frac{3}{2}$

49. 假設在實數中有兩數列  $\{x_n\}$  與  $\{y_n\}$ ，已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ ，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ?$

- (A) 0                      (B)  $\infty$                       (C)  $-\infty$                       (D) 以上皆有可能

50. 設三次實係數多項式  $f(x)$  滿足下列各式： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3 - 1} = 8$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} = -5$

試求  $f(x) = 0$  的三根和為何？

- (A) 1                      (B) 10                      (C) 13                      (D) 31

試題結束