

新竹縣立東興國民中學 106 年度教師甄選試題

科目：數學專業科目

說明：選擇題，共五十題，每題二分，答錯不倒扣，總分一百分。

1. 求此無窮級數 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n-1}{(n-1)^2 n^2}$ 的和為？

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 不存在

2. 將三個半徑為 1 的球彼此外切且放置在一水平面上，一個半徑為 3 的大球放在它們的上面，

試問大球的最高點至平面的距離是多少？

- (A) $4 + \frac{2\sqrt{33}}{3}$ (B) $4 + \frac{\sqrt{61}}{3}$ (C) $4 + \frac{\sqrt{141}}{3}$ (D) 8

3. 已知正 $\triangle ABC$ 的外接圓上任取一點 P ，若 $\overline{PA} > \overline{PB} > \overline{PC}$ ，則下列敘述何者正確？

- (A) $\overline{PA} > \overline{PB} + \overline{PC}$ (B) $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$ (C) $\overline{PA} < \overline{PB} + \overline{PC}$ (D) 以上皆非

4. 將 6 這個數寫成 4 個正整數之和的方法如下：

$$6=1+1+1+3=1+1+3+1=1+3+1+1=3+1+1+1 \\ =1+1+2+2=2+2+1+1=2+1+2+1=1+2+1+2=1+2+2+1=2+1+1+2$$

若有順序之分，則有 10 種方法數。

依此方法，將 10 這個數寫成 4 個正整數之和，則會有_____種方法數。

- (A) 65 (B) 72 (C) 84 (D) 106

5. 已知有三個三角形它們的邊長分別為 $(1,1,\sqrt{2})$ 、 $(3,4,5)$ 與 $(5,12,13)$ ，求這三個三角形的面積和為多少平方單位？

- (A) 36.5 (B) $36 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $40 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $88 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

6. 已知 $p=2^{20}$ 、 $q=5^{10}$ ，則下列何者正確？（ $\log 2=0.3010$ 、 $\log 3=0.4771$ ）

- (A) q 的最高位數字為 8 (B) $p+q$ 的個位數字為 9 (C) $p+q$ 是 7 位數 (D) pq 是 14 位數

7. 設 $f(\frac{1}{x}) = x^2$ 且 $g(\frac{x}{x+1}) = x^2$ ，求 $f(g(2)) = ?$

- (A) 4 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 16 (D) $\frac{1}{16}$

8. 求 $\frac{2}{3 \times 5} + \frac{3}{5 \times 8} + \frac{4}{8 \times 12} + \frac{5}{12 \times 17} + \frac{6}{17 \times 23} + \frac{7}{23 \times 30} = ?$

- (A) $\frac{9}{10}$ (B) $\frac{13}{30}$ (C) $\frac{11}{30}$ (D) $\frac{9}{30}$

9. 求不等式 $y < -2x + 50$ 的所有正整數解 (x,y) 有幾組？

- (A) 1081 (B) 1128 (C) 1176 (D) 以上皆非

10. 設 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 為空間中的三個非零且不平行向量，請選出正確的選項。

- (A) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$
 (B) 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 且 $\vec{b} \perp \vec{c}$ ，則 $\vec{a} \perp \vec{c}$
 (C) 若 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ 且 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ，則 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$
 (D) 若 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ ，則 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 落在同一平面上

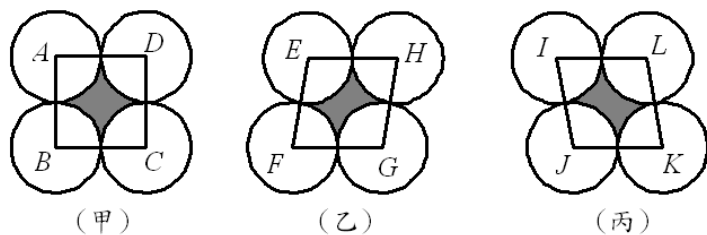
背面尚有試題

11. 已知 x 為實數，則 $\sqrt{x^2 - 6x + 34} + \sqrt{x^2 + 4x + 13}$ 的最小值為？
 (A) $\sqrt{13} + \sqrt{34}$ (B) $3 + 5\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{89}$ (D) $\sqrt{91}$
12. 若 $300 \leq A < 400$ ， $100 \leq B < 200$ ， $0 \leq C < 100$ ，已知 A 、 B 、 C 分別除以 m 後，餘數分別為 17、13 和 6，且 A 、 B 、 C 的和可以被 m 整除，請問 A 、 B 、 C 的和最大是多少？
 (A) 692 (B) 684 (C) 648 (D) 624
13. 求 $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} + \cos \frac{10\pi}{5} = ?$
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2
14. 已知二次函數 $f(x)$ 的圖形移動後會和 $g(x) = -2(x - 3)^2 - 5$ 的圖形重合，而且 $f(5 + k) = f(5 - k)$ ，請問下列何者正確？
 (A) $f(2) > f(5) > f(7)$ (B) $f(7) > f(5) > f(2)$ (C) $f(5) > f(7) > f(2)$ (D) $f(5) > f(2) > f(7)$
15. 已知 $\triangle ABC$ 中 E 在 \overline{AB} 上且 D 在 \overline{BC} 上，若 \overline{DE} 垂直 \overline{BC} 且 $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{AC} = 9$ ， $\overline{BE} = 2$ ， $\overline{BD} = \frac{6}{5}$ ，則 $\overline{BC} = ?$
 (A) 8 (B) 10 (C) $6 + \sqrt{17}$ (D) $8 + \sqrt{17}$
16. 設 P 為正三角形內部中的一點，且 P 點到三邊距離分別為 4、5、6，請問，這個正三角形的面積大小為何？
 (A) $150\sqrt{3}$ (B) 225 (C) 150 (D) $75\sqrt{3}$
17. 求 $|\sin 76^\circ - 1| - |8 - \sqrt{65}| + |7 - 2\pi| = ?$
 (A) $-\sin 76^\circ - \sqrt{65} - 2\pi$ (B) $2 - \sin 76^\circ - \sqrt{65} + 2\pi$
 (C) $-2 + \sin 76^\circ - \sqrt{65} - 2\pi$ (D) $16 - \sin 76^\circ - \sqrt{65} - 2\pi$
18. 設 α 、 β 為 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 之兩根，則 $2\alpha^3 - 9\beta^2 + 100 = ?$
 (A) $-1 + \sqrt{6}$ (B) $-1 - \sqrt{6}$ (C) $-\sqrt{6}$ (D) -1
19. 假設 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 且 $f^{(2)}(x) = f[f(x)]$ ，求 $f^{(200)}(200) = ?$
 (A) $\frac{200}{40001}$ (B) $\frac{1}{200}$ (C) $\frac{400}{80001}$ (D) $\frac{1}{400}$
20. 若 $a < b < c$ ，且 $x < y < z$ ，設 $A = ax + by + cz$ ， $B = ax + cy + bz$ ， $C = bx + cy + az$ ，請問 A 、 B 、 C 中最小的是？
 (A) A (B) B (C) C (D) 不一定
21. 已知座標平面上圓 O 之圓心座標為 $(2, 2)$ 且與 x 軸切於 $(2, 0)$ ，今過 $(6, 0)$ 作別於 x 軸的切線，則該切線切於圓 O 的切點座標為？
 (A) $(\frac{16}{5}, \frac{18}{5})$ (B) $(\frac{18}{5}, \frac{16}{5})$ (C) $(\frac{16}{5}, \frac{16}{5})$ (D) $(\frac{18}{5}, \frac{18}{5})$
22. 假設 a 、 b 、 c 都是質數，且 $a + b + c + abc = 99$ ，則 $a + b + c = ?$
 (A) 23 (B) 25 (C) 26 (D) 28
23. 求空間中此方程式 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ 圖形與 yz 平面相交的圖形為？
 (A) 圓 (B) 橢圓 (C) 雙曲線 (D) 以上皆非

24. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為邊長 2 公分的正方形， $EFGH$ 、 $IJKL$ 為邊長 2 公分的菱形，其中 $\angle F=70^\circ$ 、 $\angle J=100^\circ$ 。

分別以各頂點為圓心，1 公分為半徑畫圓，則甲、乙、丙三個圖中灰色部分面積大小關係為何？

- (A) 甲 = 乙 = 丙 (B) 甲 > 乙 = 丙 (C) 甲 > 乙 > 丙 (D) 甲 > 丙 > 乙



25. 已知 $\frac{b}{xy} + \frac{x}{ab} = \frac{91}{15}$ ，求 $\frac{3ab^2 - 5abxy + 3x^2y}{2ab^2 + 4abxy + 2x^2y} = ?$

- (A) $\frac{9}{11}$ (B) $\frac{11}{9}$ (C) $\frac{91}{15}$ (D) $\frac{15}{91}$

26. 坐標平面上 A 點坐標 $(4, 5)$ ， O 為原點，若要在兩條軸上找一點 P ，使得 $\triangle AOP$ 為等腰三角形，

請問：符合條件的 P 點共有幾個？

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 個

27. 已知直線 $y = k$ 與函數 $y = x^{-5}$ ， $y = x^{-10}$ ， $y = x^{-15}$ 之交點分別為 A, B 、 C, D 與 E, F 且 $\overline{AB} = a$ ， $\overline{CD} = c$ ， $\overline{EF} = e$ 。如果 $0 < k < 1$ 則下列何者正確？

- (A) $a < c < e$ (B) $e < c < a$ (C) $a = c = e$ (D) 以上皆有可能

28. 一副撲克牌有 52 張，有四種花色黑桃、紅心、梅花、方塊各 13 張 ($A, 2, 3, 4, \dots, J, Q, K$)，其中我們約定 $A=1$ 、 $J=11$ 、 $Q=12$ 、 $K=13$ ，現將整副撲克牌由上而下依下列規則排列：數字順序為 $A, 4, 7, 10, K, 3, 6, 9, Q, 2, 5, 8, J, A, \dots$ ，花色排列順序則為黑桃、紅心、梅花、方塊，已知整副撲克牌的第一張為黑桃 A ，則關於此副撲克牌的敘述何者錯誤？

- (A) 該副牌的最後一張會是方塊 J
 (B) 所有的 K 應該會出現在第 5、18、31、44 張
 (C) 依序找出所有的 Q ，花色出現的順序會是黑桃、方塊、梅花、紅心
 (D) 依序將所有的黑桃牌找出來，最後一張會是黑桃 2

29. 求無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n} [3^n + 8(\frac{3^n}{2^n})]$ 的和為？

- (A) $107\frac{3}{5}$ (B) $117\frac{3}{5}$ (C) $127\frac{3}{5}$ (D) ∞

30. 如右圖， B, C, E 三點共線且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 、 $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ ，若 $\triangle ABC$ 的面積為 16， $\triangle CDE$ 的面積為 36，

則 $\triangle ACD$ 的面積為何？

- (A) 18 (B) 20 (C) 22 (D) 24



31. 將一正方形切成四個矩形，已知其中三個的面積分別為 4、9、16 平方公分，則第四個矩形的面積有幾種可能？

- (A) 1 (B) 2 (C) 無窮多 (D) 以上皆非

背面尚有試題

32. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle ACB = \angle ADB = 30^\circ$ ， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$ ，

則 $\overline{CD} = ?$

- (A) 7 (B) 8 (C) $6\sqrt{2}$ (D) $6\sqrt{3}$



33. 若平面上有兩組平行線，第一組有相異 20 條皆平行 x 軸，第二組有相異 10 條皆平行 y 軸，求這 30 條線共形成幾個正方形？

- (A) 2000 (B) 2480 (C) 4275 (D) 8550

34. 圓周上八個點 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 將圓 O 的圓周八等分，若圓 O 的半徑為 4，

則 $\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{DG}^2 + \overline{GA}^2 = ?$

- (A) 32 (B) 64 (C) 96 (D) 128

35. 已知 $10^x = y$ ，則下列何者正確？

- (A) $x = \ln y$ (B) $y = \ln x$ (C) $x = \log y$ (D) $y = \log x$

36. 我們常用奇位數的和與偶位數的和之間的差是否為 11 的倍數（這裏指的奇位數是個位數、百位數、萬位數、...，偶位數指的是十位數、千位數、...），來作為判斷該數是否為 11 的倍數的方法。

然而，如果某數的（奇位數的和）－（偶位數的和）＝－13，請問，某數 $\div 11$ 所得餘數可否判斷？

- (A) 可判斷，餘數＝13 (B) 可判斷，餘數＝2 (C) 可判斷，餘數＝9 (D) 條件不足，無法判斷

37. 假設袋中有 100 個紅球與 80 個白球，今任意取出 50 個球，則下列敘述何者正確？

- (A) 袋中紅球的個數比取出白球的個數可能多出超過 50 個
(B) 袋中紅球的個數比取出白球的個數可能多出 1 個到 49 個之間
(C) 袋中紅球的個數比取出白球的個數多 50 個
(D) 以上皆有可能

38. 請問，下列對重心的敘述，何者正確？

- (A) 通過三角形重心的任意直線，會將三角形分割成兩塊等面積圖形
(B) 通過平行四邊形重心的任意直線，會將三角形分割成兩塊全等的圖形
(C) 鳶形對角線的交點，即為重心
(D) 梯形的重心，會落在梯形兩腰中點的連線段上

39. 對於座標平面上，任意以 (2,4) 與 (5,8) 為圓心的兩圓，假設它們的半徑分別為 r_1 與 r_2 。若兩圓相切則下列何者正確？

- (A) $r_1 + r_2 = 5$ (B) $r_1 - r_2 = 5$ (C) $r_2 + r_1 = 5$ (D) 以上皆有可能

40. \overline{AB} 為直徑， $\overline{DO} \perp \overline{AB}$ 交 \overline{AC} 於 D 點，以下敘述何者錯誤？

- (A) $\overline{AD} = \overline{BD}$ (B) $\angle C = 90^\circ$ (C) 四邊形 $ODCB$ 為鳶形 (D) $\angle A = \angle DBO$



41. 已知 a ， b ， c ， d 皆為正整數且 $2a < 3b$ ， $b < 4c + 8$ ， $c < 8d$ ，求 a 的最大值除以 48 之餘數為？

- (A) 11 (B) 13 (C) 15 (D) 17

42. 某一檢查方法對檢驗某一疾病有 90%的準確率，也就是說，如果患有該疾病的人做檢查，那麼有 90%的機會會呈現陽性反應；如果沒有該疾病的人做檢查，也有 90%的機會會呈現陰性反應。假設已知全國人口中有 5%的人患有該疾病，如果有一人以此檢查方法的檢查結果為陽性，那麼他罹患該病的機率為何？

- (A) 7/50 (B) 43/50 (C) 19/28 (D) 9/28

43. 求所有三位數 abc (100 到 999)中，所有 $a \neq b \neq c$ 的數有幾個？

- (A) 648 (B) 729 (C) 810 (D) 以上皆非

44. 下列敘述何者錯誤？

- (A) 任意菱形恰有一內切圓 (B) 任意矩形恰有一外接圓 (C) 被一個三角形所包含之圓中，內切圓之面積最大
(D) 包含一個三角形之所有圓中，外接圓之面積最小

45. 假設一元三次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有三個根成等差數列，則下列敘述何者錯誤？

- (A) 有一根為 $-\frac{a}{3}$ (B) 某兩根和為 $-\frac{2a}{3}$ (C) $2a^3 + 27c = 9ab$ (D) $a^2 < 3b$

46. 設正整數 m 、 n 滿足 $\frac{3}{4} < \frac{m}{n} < \frac{5}{6}$ ，當 n 最小時， m 是多少？

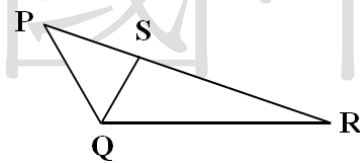
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

47. 已知 a, b, c, d 皆為實數且滿足 $a + b + c + d = 5$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{25}{3}$ ，

則當 a 達到可能的最大值時 b 為？

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) 以上皆有可能

48. 如圖， \overline{QS} 為三角形 PQR 的角平分線，且 $\angle PQS = \angle RQS = 60^\circ$ ，已知 $\overline{PQ} = 3$ ， $\overline{QR} = 6$ ，求 $\overline{QS} = ?$



- (A) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\frac{3}{2}$

49. 假設在實數中有兩數列 $\{x_n\}$ 與 $\{y_n\}$ ，已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ?$

- (A) 0 (B) ∞ (C) $-\infty$ (D) 以上皆有可能

50. 設三次實係數多項式 $f(x)$ 滿足下列各式： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3 - 1} = 8$ ， $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} = -5$

試求 $f(x) = 0$ 的三根和為何？

- (A) 1 (B) 10 (C) 13 (D) 31

試題結束