國立嘉義大學九十六學年度
應用數學系碩士班招生考試試題

科目：線性代數

說明：本試題為計算、證明題，請標明題號，同時將過程寫在「答案卷」上。

1. Let $V=\{(x,\ y,\ z) \mid x-2\,y+3\,z=0\}$.
   (a) Show that V is subspace of $\Re^3$. （5 分）
   (b) Find an orthonormal basis for V. （5 分）
   (c) Find the orthogonal projection of the vector $v=(1,\ 2,\ 3)$ on V. （5 分）
   (d) Let P be the orthogonal projection from $\Re^3$ onto V. Find $P(x,\ y,\ z)$. （5 分）

2. Let $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Find the characteristic polynomial of A. （5 分）
   (b) Find the minimal polynomial of A. （5 分）
   (c) Let $f(x)=3x^5-x^4-x^2+4$. Find $f(A)$. （5 分）
   (d) Find an invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix. （5 分）

3. Let $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.
   (a) Find the Jordan Canonical form J of A. （5 分）
   (b) Find an invertible matrix P such that $P^{-1}AP=J$. （5 分）
   (c) Compute A^{100}. （5 分）

4. Show that $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ are similar but are not unitarily equivalent. （15 分）

5. Let $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Show that the linear transformation $d/dt : p(t) \to p'(t)$ acting on the vector space of all polynomials with degree at most 3 has the basis representation A in the basis $B=\{1,\ t,\ t^2,\ t^3\}$. （7 分）
   (b) What is the Jordan Canonical form J of the matrix A? （8 分）

6. Define $T: M_{2\times 2}(\Re) \to M_{2\times 2}(\Re)$ by $T(A)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, where $A \in M_{2\times 2}(\Re)$.
   (a) Find the null space $N(T)$ of T and the dimension of $N(T)$. （7 分）
   (b) Find the range $R(T)$ of T and the dimension of $R(T)$. （8 分）