國立嘉義大學九十三學年度應用數學系
碩士班考試試題

科目：高等微積分(Advanced Calculus)

說明：本考試試題為計算、證明題，請標明題號，同時將過程作答在「答案卷」上。

計算、證明題（1~2 題每題 20 分，3~6 題每題 15 分，共 100 分）

1. Prove or disprove the following statements.

   (a). If $f:[a,b]\to R$ is a Riemann integrable function, so is $|f|$. （10 分）

   (b). If f is a nonnegative continuous function on $[0,\infty)$ and $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converges, then $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. （10 分）

2. Calculate

   (a). $\int_0^\infty te^{-\sqrt{t}}\,dt$. （10 分）

   (b). $\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^2}\,dx$. （10 分）

3. Let $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)$, $\forall n\in N$.
   Show that the sequence $\{a_n\}$ converges. （15 分）

4. (a). Suppose $f\ge 0$, f is continuous on $[0,1]$, and $\int_0^1 f(x)\,dx=0$. Show that $f(x)=0$ for all $x\in[0,1]$. （8 分）

   (b). Let f be Riemann integrable on $[0,1]$ and let $f(x)>0$ for all $x\in[0,1]$. Show that $\int_0^1 f(x)\,dx>0$. （7 分）

5. Test the following series for convergence:

(a). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$ （7 分）

(b). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+(-1)^{n}\ \frac{n+3}{3n+2}\right)^{n}$ （8 分）

6. Let $h_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}$, $x \in R$. Show that $\{h_n\}$ converges uniformly to a function h, and the equation $h'(x)=\lim_{n\to\infty} h_n'(x)$ is correct if $x \neq 0$, but false if $x = 0$. （15 分）