國立嘉義大學九十一學年度轉學生招生考試試題

科目：線性代數

一、填充題： 60％ （請標明題號，並將答案寫在答案卷上。）

1. The projection of $(1,2,3)$ onto the plane spanned by $(0,1,0)$ and $(-1,0,1)$ is _________. （10%）

2. Let $T:\Re^2 \to \Re^2$ be a linear operator such that $T(1,1)=(1,-2)$, $T(1,0)=(2,1)$, then $T(5,-3)=$ _____. （10%）

3. Let W be the subspace spanned by $(1,1,0,1,1)$, $(2,0,0,1,0)$, $(1,3,0,2,3)$ and $(4,-2,0,1,-2)$, then $\dim(W)=$ __________. （10%）

4. (a). Let A be 4×4 matrix and $|A|=7$. Then
   $|A^T|=$ _____, $|3A|=$ _____, $|A^3|=$ _____, $|A^{-1}|=$ _____. （each 1.5%）

   (b).The determinant of the $n\times n$ matrix $\begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-n \end{bmatrix}$ is __________. （4%）

5. Let $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$. Then

   (a). The eigenvalues of A are __________. （5%）

   (b). The dimensions of the corresponding eigenspaces are __________. （5%）

6. Let $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Then

   (a). An invertiable matrix P such that $P^{-1}AP$ is diagonal is __________. （4%）

   (b). $A^{20}=$ __________. （3%）

   (c). $A^{1999}=$ __________. （3%）

二、計算證明題： 40% （請標明題號，並將計算證明過程寫在答案卷上。）

1. Show that if A is an invertible matrix, then A^T is also invertible.（10%）
2. Find the image of $T(x,y,z)=(x-2y+z,\ 2x-y-z,\ -x-4y+5z)$.（10%）
3. Let $T:V\to V$ be a linear transformation on the n-dimensional vector space V. If λ_1, λ_2, ..., λ_r are r distinct eigenvalues of T and v_1, v_2, ..., v_r are their corresponding eigenvectors, prove that v_1, v_2, ..., v_r are linearly independent.（10%）
4. Let $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Find a (real) orthogonal matrix P for which P^TAP is diagonal.（10%）